А. Н. Т и м а ш е в (Москва, ТВП)**. Асимптотические разложения распределения числа компонент в случайном отображении.**

Рассматривается класс всех n^n однозначных отображений n-элементного множества в себя. Задавая на этом классе равновероятное распределение, обозначим через ν_n случайную величину, равную числу компонент связности в случайно выбранном отображении. Известно [1], что

$$\mathbf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{n!}{N!n^n}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(-\ln(1-\theta(z)))^N}{z^{n+1}}\,dz, \qquad N = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где

$$\theta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} z^k, \qquad |z| \leqslant e^{-1} \tag{2}$$

и интегрирование осуществляется по окружности $|z| = z_0 \in (0, e^{-1})$, пробегаемой в положительном направлении.

Известно также [2, с. 85], что если n, $N \to \infty$ так, что

$$N = \frac{\ln\, n}{2} + x\sqrt{\frac{\ln\, n}{2}}, \qquad |x| \leqslant c = \mathrm{const}\,, \tag{3}$$

то равномерно относительно $x \in [-c, c]$

$$\mathbf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{\pi\,\ln\, n}} e^{-x^2/2}(1 + o\,(1)). \tag{4}$$

Соотношение (4) означает, в частности, что при условиях (3) случайная величина $\sqrt{2/\ln\, n}(\nu_n - (\ln\, n)/2)$ имеет в пределе при $n \to \infty$ стандартное нормальное распределение.

Оценки вероятности $\mathbf{P}\{\nu_n = N\}$ для случая, когда $N = N(n)$ при $n \to \infty$ меняется так, что $N \ln N = o\,(\ln n)$, можно найти в [3]. В [1] такого рода оценки получены в предположении, что $n, N \to \infty$ так, что $1 < \beta_0 \leqslant \beta = nN^{-1} \leqslant \beta_1 < +\infty$, $\beta_0, \beta_1 = \mathrm{const}$ а также при условии $n - N = o\,(\sqrt{n}) \geqslant 0$. Случай, когда $\ln\, n = o\,(N)$ и $N = O\,((\ln\, n)^2)$ при $n \to \infty$, рассматривался в [4].

Теорема. *Пусть* n, N *так, что* $0 < \gamma_0 \leqslant \gamma = N/\ln\, n \leqslant \gamma_1 < +\infty$, $\gamma_0, \gamma_1 = \mathrm{const}$.

Тогда равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$

$$\mathbf{P}\,\{\nu_n = N\} = \sqrt{\frac{2\gamma}{n}} e^{\varphi(\gamma)} \frac{(\ln\, n)^N}{2^N N!}(1 + o\,(1)),$$

где: $\varphi(\gamma) = \gamma(1 - \ln\,(2\gamma)) - 1/2 < 0$ *при* $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1/2$; $\varphi(1/2) = 0$.

Доказательство проводится применением метода перевала к (1) с учетом (2).

Следствие 1. *В условиях теоремы равномерно относительно* $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$

$$\mathbf{P}\,\{\nu_n = N\} = \frac{(en)^{\varphi(\gamma)}}{\sqrt{\pi\,\ln\, n}}(1 + o\,(1)).$$

Следствие 2. *Пусть* $n, N \to \infty$ *так, что* $N = (\ln\, n)/2 + x\sqrt{(\ln\, n)/2}$*, где* $x = x(n) = o\,(\sqrt{\ln\, n})$.

Тогда

$$\mathbf{P}\,\{\nu_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{\pi\,\ln\, n}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{2}{\ln\, n}\right)^{m/2}\right\}(1 + o\,(1)). \tag{5}$$

Ряд в (5) при всех достаточно больших значениях n сходится и является асимптотическим разложением в том смысле, что если $x = x(n) = o\,((\ln\, n)^{(M+1)/(2M+6)})$, $M = 0, 1, \ldots$, при $n \to \infty$, то

$$\mathbf{P}\,\{\nu_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{\pi\,\ln\, n}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{M} \frac{(-1)^{m+1} x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \left(\frac{2}{\ln\, n}\right)^{m/2} \right\} (1 + o\,(1)).$$

З а м е ч а н и е. Из следствия 2 при $M = 0$ получаем, что оценка (4) остается справедливой, если $x = x(n) = o\,((\ln\, n)^{1/6})$; при $M = 1$ получаем, что если $x = x(n) = o\,((\ln\,)^{1/4})$, то

$$\mathbf{P}\,\{\nu_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{\pi\,\ln\, n}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\sqrt{\frac{2}{\ln\, n}} \right\} (1 + o\,(1))$$

и т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимашев А.Н.* Случайные отображения конечных множеств с известным числом компонент. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 818–828.
2. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 208 с.
3. *Павлов Ю. Л.* Предельные распределения одной характеристики случайного отображения. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI, в. 4, с. 841–847.
4. *Чеплюкова И.А.* Об одной характеристике случайного отображения с известным числом циклов. — Дискретн. матем., 2006, т. 18, в. 3, с. 43–60.