А. Н. Т и м а ш е в (Москва, ТВП)**. Асимптотические разложения для распределения числа блоков в случайном разбиении.**

Пусть θ_n — случайная величина, равная числу блоков в разбиении, выбранном случайно равновероятно из класса всех разбиений множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Если B_n — число таких разбиений (число Белла), то [1, с. 139]

$$\mathbf{P}\{\theta_n = N\} = \frac{\sigma(n, N)}{B_n}, \qquad N = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

При этом $\sum_{N=1}^{n} \sigma(n, N) = B_n$, $n = 1, 2, \dots$, и $\sigma(n, N)$ — числа Стирлинга второго рода.

Известно [2], что при $n \to \infty$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \exp\left\{n\left(r + \frac{1}{r} - 1\right) - 1\right\}(1 + o\,(1)), \tag{2}$$

где r — единственный положительный корень уравнения

$$re^r = n, \tag{3}$$

причем

$$r \sim \ln n, \qquad n \to \infty; \tag{4}$$

точнее (ср. [2]),

$$r = \ln n - \ln \ln n + \frac{\ln \ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right).$$

Известно также, что при $n \to \infty$ [1, с. 141] $\mathbf{E}\theta_n = (n/\ln n)(1 + o\,(1))$, $\mathbf{D}\theta_n = (n/(\ln n)^2)(1 + o\,(1))$ и случайная величина $(\mathbf{D}\theta_n)^{-1/2}(\theta_n - \mathbf{E}\theta_n)$ имеет в пределе стандартное нормальное распределение.

Если $N = N(n) = o\,(n)$ при $n \to \infty$, то [3]

$$\sigma(n, N) = \frac{N^n}{N!} \exp\{-Ne^{-n/N}\}(1 + o\,(1)). \tag{5}$$

На основе соотношений (1)–(5) доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть n, $N \to \infty$ так, что $N = (n + x\sqrt{n})/r$, где $x = x(n) = o\,(\sqrt{n}/\ln n)$, r — единственный корень уравнения* (3), $r > 0$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\theta_n = N\} = \frac{\ln n}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}x^{m+2}}{(m+2)n^{m/2}}\left(1+\frac{1}{r(m+1)}\right)\right\}(1+o\,(1)). \tag{6}$$

Разложение (6) *является асимптотическим в том смысле, что если $n\to\infty$, при $x = o\,(n^{(M+1)/(2M+6)})$ в соответствующем сходящемся ряде достаточно ограничиться первыми M членами, $M = 0, 1, \dots$*

Следствие. *Если в условиях теоремы $x = o\,(\sqrt{\ln n})$, то* $\mathbf{P}\{\theta_n = N\} = (\ln n/\sqrt{2\pi n})e^{-x^2/2}(1 + o\,(1))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978.
1. *Moser L.*, *Wyman M.* An asymptotic for the Bell numers. — Trans. Roy. Soc. Canada, 1955, v. 49, sec. 3, p. 49–54.
1. *Медведев Ю. .И.*, *Ивченко Г. И.* Асимптотические представления конечных разностей от степенной функции в произвольной точке. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, с. 139–144.