Т. В. С е м о ч к и н а (Москва, МГИЭМ). **Исследование функционала накопления в системе $M|G^*|1|2$.**

Рассматривается система массового обслуживания $M|G^*|1|2$. Символ G^* означает, что исследуется система с произвольным законом обслуживания и неполной информацией. Предполагается, что известно лишь, занята ли система в некоторый момент времени, но если система занята, то неизвестно, какое количество требований находится в ней. Функционирование системы описывается полумарковским управляемым процессом. В качестве марковских моментов выступают моменты начала обслуживания и моменты полного освобождения системы от требований.

Управление системой осуществляется следующим образом. В марковские моменты времени лицо, управляющее системой, должно принять решение относительно того, как долго требуется обслуживать то требование, которое в такой момент поступило на прибор. Решение принимается в соответствии с некоторой случайной мерой $G(u)$. Если система в некоторый марковский момент времени освобождается от требований, т. е. переходит в состояние «0», то решение принимается в соответствии с произвольной мерой G0(u). Если система в некоторый марковский момент времени попадает в состояние «1» или «2» (т. е. в этот момент начинается обслуживание требования, причем в системе находится или 1, или 2 требования), то независимо от числа требований в системе решение принимается в соответствии с некоторой мерой $G(u)$.

Исследуется функционал накопления, т.е. доход, получаемый от работы системы в течение единицы времени. В общем виде функционал накопления можно представить следующим образом: $S=\sum_{i=0}^{2}\sigma_i\pi_i/\sum_{i=0}^{2}m_i\pi_i$, где (π_0,π_1,π_2) — стационарное распределение полумарковского процесса, m_0,m_1,m_2 — математические ожидания времени непрерывного пребывания процесса в состояниях 0, 1, 2 соответственно, $\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2$ — математические ожидания накопленного эффекта за время пребывания в состояниях 0, 1, 2 соответственно. Введем следующие величины: S_0 — плата за обслуживание одного требования (руб.), S_1 — плата за потерю требования (руб.), S_2 — плата за час простоя пустой системы (руб./час), S_3 — плата за час пребывания требования на приборе (руб./час), S_4 — плата за час пребывания требования в очереди (руб./час), S_5 — плата за 1 пустое место для ожидания (руб./час). Функционал накопления примет вид:

$$S=\biggl(-\frac{\alpha^2}{\lambda}(S_2+S_1\lambda+2S_4)+\frac{\alpha}{\lambda}(S_4-S_5)-\alpha\delta(S_3+S_1\lambda+2S_4)+S_0+S_1+\frac{1}{\lambda}(S_4-S_5)$$
$$-\delta(S_3+S_1\lambda+2S_4)+\frac{\beta}{\lambda}(S_3-S_0\lambda+S_5+S_4)+\delta\beta(S_3+S_1\lambda+2S_4)\biggr)\biggl(\frac{\alpha^2}{\lambda}+\delta-\beta\delta\biggr)^{-1},$$

где $\alpha=\int_0^\infty e^{-\lambda u}\,dG(u)$, $\beta=\int_0^\infty \lambda u e^{-\lambda u}\,dG(u)$, $\delta=\int_0^\infty u\,dG(u)$.

Задача состоит в том, чтобы найти меру $G(u)$, при которой этот функционал примет наибольшее значение, т.е. определить, как назначать длительность обслуживания, чтобы максимизировать доход, полученный от работы системы. Рассмотрим функционал S при фиксированных значениях α и β. Тогда функционал является дробно-линейным относительно β. Известно, что функционал такого вида примет максимальное значение при функции

$$G(u)=\begin{cases}0, & \text{при } 0\leqslant u\leqslant u_1,\\ p, & \text{при } u_1<u\leqslant u_2,\\ 1, & \text{при } u_2<u<\infty.\end{cases}$$

Таким образом, требуется найти точки скачков функции $G(u)$, u_1 и u_2 и вероятность p. Достаточно рассмотреть следующую задачу оптимизации:

$$\beta=p\lambda u_1e^{-\lambda u_1}+(1-p)\lambda u_2e^{-\lambda u_2}\to\mathrm{extr},$$

$$pe^{-\lambda u_1} + (1-p)e^{-\lambda u_2} - = \alpha, \quad pu_1 + (1-p)u_2 = \delta, \quad 0 \leqslant u_1 \leqslant u_2, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1,$$

где α и δ — фиксированные числа, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\delta \geqslant 0$. Применяя метод Лагранжа решения задач оптимизации с ограничениями, при фиксированных α и δ найдем минимум $(\beta_{\min}(\alpha, \delta))$ и максимум $(\beta_{\max}(\alpha, \delta))$ целевой функции.

При $\alpha = e^{-\lambda\delta}$ величина β может достигать минимума или максимума, только если $G(u) = 0$ при $0 \leqslant u \leqslant \delta$, $G(u) = 1$ при $\delta < u < \infty$. В противном случае задача поиска экстремума β сводится к решению системы (при $l_1 = e^{-\lambda u_1}$, $l_2 = e^{-\lambda u_2}$)

$$l_2 - l_1 + (u_1 l_1 - u_2 l_2)\lambda l_1 \frac{u_2 - u_1}{l_2 - l_1} + \lambda^2 u_1 l_1 (u_2 - u_1) = 0,$$

$$\frac{u_2 - u_1}{l_2 - l_1} = \frac{u_2 - \delta}{l_2 - \alpha}, \quad p = \frac{u_2 - \delta}{u_2 - u_1}, \quad 0 < p < 1, \quad 0 \leqslant u_1 < u_2, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad \delta \geqslant 0.$$

Таким образом, получим два значения функционала S при фиксированных α и δ, при $\beta = \beta_{\min}(\alpha, \delta)$ и при $\beta = \beta_{\max}(\alpha, \delta)$. Затем, изменяя значения α и δ, найдем максимум функционала S при $\beta = \beta_{\min}(\alpha, \delta)$ и максимум при $\beta = \beta_{\max}(\alpha, \delta)$, сравним два полученных значения и выберем большее.