И. А. К р у г л о в (Москва, ТВП)**. К условию А. Н. Колмогорова для цепей Маркова.**

Пусть $\mathfrak{I}$ — конечная простая однородная положительно регулярная цепь Маркова с множеством состояний $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, матрицей переходных вероятностей $P = [p(i,j)]$. А.Н. Колмогоровым введены достаточные условия асимптотической нормальности сумм вещественных случайных величин, связанных в функцию от состояний цепи Маркова $\mathfrak{I}$. Эти условия можно сформулировать следующим образом.

Мы будем использовать понятия теории графов, следуя изложению пункта 3.2 главы 2 книги [1]. Введем соответствующий цепи Маркова $\mathfrak{I}$ ориентированный граф Γ с множеством вершин $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ и множеством ориентированных ребер

$$\{e_{i,j}^{+1}, e_{j,i}^{-1} |.i,j \in \{1,\ldots,n\}, p(i,j) > 0\}.$$

Петлей z в графе Γ с концом E_1 называется последовательность ребер вида:

$$z = (e_{1,i_2}^{\varepsilon_1}, e_{i_2,i_3}^{\varepsilon_2}, \ldots, e_{i_{k-1},i_k}^{\varepsilon_{k-1}}, e_{i_k,1}^{\varepsilon_k}). \tag{1}$$

Обозначим через $Z^{(1)}$ множество всех петель в Γ с концом E_1. Для любых $u, v \in Z^{(1)}$ через $u * v$ обозначим петлю, полученную приписыванием v справа от u (произведение петель u и v). Группоид $(Z^{(1)}, *)$ является полугруппой.

Пусть $(F_n, \times)$ – свободная группа ранга n, порожденная свободными образующими $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $(A_n, +)$ – свободная абелева группа ранга n, порожденная свободными образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Определим гомоморфизмы полугрупп:

$$\varphi_1 : Z^{(1)} \to F_n, \varphi' : Z^{(1)} \to A_n,$$

где для любых $i,j \in \{1,\ldots,n\}, p(i,j) > 0$, полагаем $\varphi_1(e_{i,j}^{+1}) = f_i, \varphi_1(e_{j,i}^{-1}) = f_i^{-1}$, $\varphi'(e_{i,j}) = a_i, \varphi'(e_{j,i}^{-1}) = -a_i$, и затем для произвольной петли $z \in Z^{(1)}$ вида (1): $\varphi_1(z) = \varphi_1(e_{1,i_2}^{\varepsilon_1}) \times \cdots \times \varphi_1(e_{i_k,1}^{\varepsilon_k})$, $\varphi'(z) = \varphi'(e_{1,i_2}^{\varepsilon_1}) + \cdots + \varphi'(e_{i_k,1}^{\varepsilon_k})$.

Гомоморфизмы φ_1 и φ' полугруппы $Z^{(1)}$ индуцируют соответствующие гомоморфизмы $\varphi_1 : \Phi(\Gamma) \to F_n$ и $\varphi' : \Phi(\Gamma) \to A_n$ фундаментальной группы $\Phi(\Gamma)$ графа Γ (см. [1]). При этом $\varphi_1(\Phi(\Gamma)) = \varphi_1(Z^{(1)}), \varphi'(\Phi(\Gamma)) = \varphi'(Z^{(1)})$. Обозначим через $Z_+^{(1)}$ подполугруппу всех $z \in Z^{(1)}$ вида $z = (e_{1,i_2}^{+1}, e_{i_2,i_3}^{+1}, \ldots, e_{i_{k-1},i_k}^{+1}, e_{i_k,1}^{+1})$.

В соответствии с [2, с. 86], условие А. Н. Колмогорова в точности означает, что множество $\varphi'(Z_+^{(1)})$ есть система образующих элементов свободной абелевой группы A_n. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть цепь Маркова $\mathfrak{I}$ положительно регулярна. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *матрица $P' \cdot P$ неразложима*;

(2) *матрица $P \cdot P'$ неразложима*;

(3) *гомоморфизм φ_1 сюръективен*;

(4) *гомоморфизм φ' сюръективен*;

(5) *цепь Маркова $\mathfrak{I}$ удовлетворяет условию А. Н. Колмогорова.*

Следствие. *Пусть матрица P — положительно регулярна и дважды стохастическая. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *условие А. Н. Колмогорова*;

(2) $\lambda < 1$;

(3) *множество $\{\pi_1^{-1} \cdot \pi_k | k \in \overline{2,n}\}$ порождает транзитивную группу подстановок на множестве $\{2, 3, \ldots, n\}$.*

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ8564.-2006.10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахтурин Ю. А.* Основные структуры современной алгебры. М.: Физматлит 1990, 320 с.
2. *Сарымсаков Т. А.* Основы теории процессов Маркова. М.: ГИТТЛ, 1954, 208 с.
3. *Круглов И. А.* Связь цепей Маркова на конечных простых полугруппах с фундаментальными группами. — Дискретн. матем., 2006, т. 18, в. 2, с. 48–54.
4. *Круглов И. А.* Принцип сходимости Клосса для произведений случайных величин со значениями в компактной группе, распределения которых определяются цепью Маркова. — Дискретн. матем., 2008, т. 20, в. 1.