

Г. Н. Д ю б и н, А. А. К о р б у т (Санкт-Петербург, СПб ЭМИ РАН).
Асимптотика жадных методов для задач о ранце: обзор и новые результаты.

Как известно, задачи о ранце являются NP -трудными. Поэтому в последние десятилетия основные усилия исследователей были направлены на разработку и анализ различных приближенных методов. Эта тенденция характерна для дискретной оптимизации в целом. Среди приближенных методов выделяются своей простотой и малой трудоемкостью так называемые жадные (в иной терминологии — пожирющие, англ. greedy) методы, являющиеся дискретными аналогами градиентных методов в непрерывной оптимизации. В основе предлагаемого подхода лежит одновременно рассмотрение прямых и двойственных жадных методов [3] как для классической (максимизационной) задачи о ранце, так и для ее минимизационного варианта. Показано, что для максимизационной задачи двойственный жадный метод всегда не лучше прямого (для минимизационной задачи ситуация обратная). Известная фольклорная теорема утверждает, что для максимизационной задачи двойственный метод может быть произвольно плохим. Поэтому истинную картину, важную для практических приложений, дает анализ поведения этих методов не в наихудших случаях, а в среднем. Этот анализ проводится для максимизационной и минимизационной задач в достаточно стандартных предположениях. 1) Коэффициенты целевой функции и ограничения — независимые одинаково распределенные на $[0, 1]$ случайные величины с равномерным распределением, либо с общим распределением, имеющим плотность p и функцию распределения F . Относительно плотности p далее всегда предполагается, что $\int_0^y p(x) dx > 0$ при всех $y > 0$, т. е. любая окрестность нуля имеет положительную меру. 2) Правая часть ограничения детерминирована и пропорциональна числу переменных n . Вводится понятие асимптотической погрешности для приближенного метода: метод имеет асимптотическую погрешность $t > 0$, если вероятность того, что модуль разности между точным и приближенным значением целевой функции не превосходит t , стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Основной целью является нахождение условий, при которых прямой и двойственный жадные методы имеют асимптотическую погрешность t . Такие условия найдены для

- а) максимизационной задачи с равномерным распределением коэффициентов [1],
- б) максимизационной задачи с общим распределением коэффициентов [4],
- в) минимизационной задачи с равномерным распределением коэффициентов [5].

Для случая а) результаты обширной серии численных экспериментов с задачами размеров $n \leq 3700$ описаны в [2]. Важно отметить, что результаты для минимизационной задачи нельзя получить из соответствующих результатов для максимизационной задачи несмотря на очевидную связь этих задач. Таким образом, для завершения этого цикла анализа остается найти соответствующее условие для минимизационной задачи с общим распределением коэффициентов. Правую часть ограничения этой задачи обозначим через d . Сформулируем основной результат в этом направлении.

Теорема. Пусть $d = \mu n$, где

$$\mu < \int_0^1 \alpha p(\alpha) F(\alpha t) d\alpha.$$

Тогда прямой и двойственный методы для задачи минимизации имеют асимптотическую погрешность t .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дюбин Г. Н., Корбут А. А. Жадные алгоритмы для задачи о ранце: поведение в среднем. — Сиб. ж. индустр. матем., 1999, т. 2, № 2(4), с. 68–93.
2. Дюбин Г. Н., Корбут А. А., Сигал И. Х. Поведение в среднем пожирающих методов для задачи о ранце — вычислительный эксперимент. — Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. III. СПб.: Наука, 2003, с. 46–54.
3. Корбут А. А. Характеризация двойственных пожирающих алгоритмов на системах независимости. — Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. СПб.: Наука, 2000, с. 42–51.
4. Diubin G., Korbut A. The average behaviour of greedy algorithms for the knapsack problem: General distributions. — Math. Meth. Oper. Res., 2003, v. 57, № 3, p. 449–479.
5. Дюбин Г. Н., Корбут А. А. Жадные алгоритмы для минимизационной задачи о ранце: поведение в среднем. — Изв. РАН. Теория и системы управления, 2008, в. 1, с. 18–28.