В. К. Доманский, **В. Л. Крепс** (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). **Повторяющиеся игры N лиц с неполной информацией, моделирующие биржевые торги: случай счетного числа возможных цен акции.**

В работе, представленной данным сообщением, обобщается введенная в [1] модель многошагового аукциона с несколькими участниками, один из которых обладает дополнительной информацией относительно цены торгуемых акций. В [1] цена акции могла принимать лишь два значения: 0 с вероятностью $1-p$ и m (целое положительное число) с вероятностью p. Здесь предполагается, что цена акции может принимать любое целое неотрицательное значение согласно заданному вероятностному распределению $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_s, \ldots)$ на множестве Z_+ целых неотрицательных чисел. Значение цены акции определяется случайным ходом перед началом аукциона на весь период торгов. Все участники аукциона знают вероятности исходов случайного хода.

Игрок 1 обладает дополнительной «инсайдерской» информацией и знает исход этого хода. Тем самым, он знает истинную цену акции. Все участники аукциона знают, что Игрок 1 является инсайдером. Аукцион организован следующим образом.

1. На каждом шаге аукциона $t = 1, 2, \ldots, n$, агенты одновременно делают ставки — называют свою цену акции. Допустимы любые неотрицательные целочисленные ставки.

2. Каждый агент, назвавший максимальную цену, покупает у аукциониста одну акцию за эту цену. Если все агенты делают одну и ту же ставку, то сделка не происходит.

3. На каждом шаге аукциона полученная чистая прибыль или убыток, то есть вырученные деньги минус ожидаемая цена проданных акций, поровну делится между всеми агентами.

Все игроки стремятся максимизировать приращение цены своего итогового портфеля (деньги плюс реализационная цена полученных акций).

В этой модели неинформированные игроки должны использовать наблюдаемые действия инсайдера, Игрока 1, для того чтобы на каждом шаге переоценивать свою априорную информацию и делать выводы об истинной цене акции. Игрок 1 сталкивается с проблемой, как лучше использовать свою информацию, не выдавая ее остальным игрокам.

Такая модель n-шагового аукциона с N участниками и ценой акции, распределенной согласно $\mathbf{p}$, сводится к повторяющейся игре N лиц $G_n(N, \mathbf{p})$ с неполной информацией у всех игроков, кроме Игрока 1, и с нулевой суммой.

Одношаговые выигрыши игрока k, $k = 1, \ldots, N$ задаются счетным числом бесконечных полиматриц A_k^s, соответствующих выбранной случаем цене акции s. Ячейка полиматрицы индексируется ситуацией $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_N)$, где $i_l \in Z_+$ — ставка игрока l. Цена покупки акции равна $i^*(\mathbf{i}) = \max\{i_1, \ldots, i_N\}$. На каждом шаге игроки делятся на покупателей и «непокупателей»: $I^+(\mathbf{i}) = \arg\max\{i_1, \ldots, i_N\}$ — множество покупателей и $I^-(\mathbf{i}) = N \setminus I^+(\mathbf{i})$ — множество «непокупателей». Пусть $|I^+(\mathbf{i})|$ — число покупателей, $|I^-(\mathbf{i})|$ — число «непокупателей».

Полиматрица выигрышей игрока k, $k = 1, \ldots, N$, в состоянии s равна

$$A_k^s(\mathbf{i}) = \begin{cases} (s - i^*(\mathbf{i})) \cdot |I^-(\mathbf{i})|/N, & \text{если} \quad k \in I^+(\mathbf{i}), \\ (i^*(\mathbf{i}) - s) \cdot |I^+(\mathbf{i})|/N, & \text{если} \quad k \in I^-(\mathbf{i}). \end{cases}$$

Рассмотренные в [1] игры $G_n^m(N, p)$ с двумя возможными значениями 0 и m цены акции, сводятся к описанным играм с распределением $\mathbf{p}$, имеющим две ненулевые компоненты $p_0 = 1 - p$, $p_m = p$.

Мы показываем, что, если случайная цена акции $C_{\mathbf{p}}$ не принадлежит L^2, то при $n \to \infty$ последовательность $V_n(1, N, \mathbf{p})$ выигрышей Игрока 1 в любой устойчивой относительно подыгр ситуации равновесия для повторяющейся игры N лиц $G_n(N, \mathbf{p})$

расходится. Если же случайная величина $C_{\mathbf{p}}$ принадлежит L^2, то последовательность $V_n(1, N, \mathbf{p})$ ограничена сверху и сходится. Далее мы рассматриваем случай $C_{\mathbf{p}} \in L^2$, или $M_2[\mathbf{p}] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k < \infty$.

Ограниченность выигрышей $V_n(1, N, \mathbf{p})$ при $\mathbf{p} < \infty$ позволяет корректно определить игры $G_\infty(N, \mathbf{p})$ с бесконечным числом шагов, описывающие торги неограниченной продолжительности. Опираясь на полученные в [2–4] результаты для игр прямых торгов, мы строим в явном виде единственную устойчивую относительно подыгр ситуацию равновесия для повторяющейся игры N лиц $G_\infty(N, \mathbf{p})$ с заранее не ограниченным числом шагов.

Теорема. *Выигрыш* $V_n(1, N, \mathbf{p})$ *Игрока* 1 *в единственной устойчивой относительно подыгр ситуации равновесия для игры* $G_\infty(N, \mathbf{p})$ *является кусочно-линейной непрерывной вогнутой функцией. Ее области линейности* $L(k) = \{\mathbf{p} : \mathbf{E}[C_{\mathbf{p}}] \in [k, k+1]\}, k = 0, 1, \ldots,$ *где математическое ожидание* $\mathbf{E}[C_{\mathbf{p}}] = M_1[\mathbf{p}] = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$. *Ее области недифференцируемости* $\Theta(k) = \{\mathbf{p} : \mathbf{E}[C_{\mathbf{p}}] = k\}$. *Для* $\mathbf{p} \in \Theta(k)$ *верны следующие равенства*:

$$V_n(1, N, \mathbf{p}) = (N-1)/2N \cdot \mathbf{D}[C_{\mathbf{p}}],$$

где $\mathbf{D}[C_{\mathbf{p}}] = M_2[\mathbf{p}] - (M_1[\mathbf{p}])^2$ *— дисперсия* $C_{\mathbf{p}}$. *Выигрыши* $V_n(k, N, \mathbf{p})$ *остальных игроков*, $k = 2, \ldots N$, *равны* $-V_n(1, N, \mathbf{p})/(N-1)$.

Равновесная стратегия Игрока 1 *совпадает с оптимальной стратегией инсайдера в игре прямых торгов, а равновесные стратегии остальных игроков совпадают с оптимальной стратегией Игрока* 2 *в игре прямых торгов.*

Таким образом, как и в [2], стратегия инсайдера порождает симметричное случайное блуждание апостериорных вероятностей, а также цен совершенных сделок.

Исследование проводилось при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07-06-00174-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Доманский В.К.*, *Крепс В.Л.* Биржевые торги в закрытом акционерном обществе и повторяющиеся игры N лиц с неполной информацией. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 3, с. 464–465.
2. *Доманский В. К.*, *Крепс В. Л.* Многошаговые торги «рисковыми» ценными бумагами: случай счетного числа возможных значений ликвидационных цен. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 5, с. 828–830.
3. *Доманский В.К.*, *Крепс В.Л.* Момент обнаружения «инсайдерской» информации на торгах с асимметричной информированностью агентов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 3, с. 399–416.
4. *Domansky V.* Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets. — Int. J. of Game Theory, 2007, 36(2), p. 241–257.