

Н. М. М е ж е н н а я (Москва, МИЭМ). **Предельные теоремы пуассоновского типа для числа плотных серий в случайной последовательности.**

Пусть $X = \{X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_T, \dots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения из множества $A = \{1, \dots, N\}$ с вероятностями $p_1, \dots, p_N$. Пусть далее $p_1 = p \in (0, 1)$. Будем говорить, что в момент t началась плотная серия единиц длины s , если $X_{t-2} \neq 1, X_{t-1} \neq 1, X_t = X_{t+s-1} = 1$, в последовательности $X_{t+1}, \dots, X_{t+s-2}$ единицы отделены друг от друга не более чем одним другим элементом и $X_{t+s} \neq 1, X_{t+s+1} \neq 1$.

Пусть событие $E_{t,s}$ означает, что в момент t началась плотная серия единиц длины s . Введем следующие обозначения:

$$q = \frac{p + \sqrt{p(4-3p)}}{2}, \quad q_1 = \frac{p - \sqrt{p(4-3p)}}{2}, \quad c = \frac{p(1-p)^4}{\sqrt{p(4-3p)}}.$$

Теорема 1. При любых $s \geq 2$ и $p \in (0, 1)$ выполнены соотношения $\mathbf{P}\{E_{1,s}\} = c(q^s - q_1^s)$ и $\mathbf{P}\{E_{1,s}\} > \mathbf{P}\{E_{1,s+1}\}$.

Определим случайные величины

$$\varsigma_{k,T} = \sum_{t=1}^T I\{E_{t,k}\}, \quad \xi_{s,T} = \sum_{k=s}^{\infty} \varsigma_{k,T}, \quad (1)$$

равные числу плотных серий, которые начинаются в моменты времени от 1 до T и имеют длину k и не меньше s соответственно.

Пусть $\lambda_{s,k} = \mathbf{E} \varsigma_{s+k,T} = T \mathbf{P}\{E_{1,s+k}\}$, $k = 0, \dots, r$, $\Lambda_{s,r+1} = \sum_{k=r+1}^{\infty} \lambda_{s,k}$. Обозначим через $\pi_{\lambda_{s,0}}, \dots, \pi_{\lambda_{s,r}}, \pi_{\Lambda_{s,r+1}}$ независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_{s,0}, \dots, \lambda_{s,r}, \Lambda_{s,r+1}$. Пусть $\rho(X, Y)$ — расстояние по вариации между распределениями случайных величин X и Y .

Теорема 2. При $s \geq 2$ выполнена оценка

$$\rho((\varsigma_{s,T}, \dots, \varsigma_{s+r,T}, \xi_{s+r+1,T}), (\pi_{\lambda_{s,0}}, \dots, \pi_{\lambda_{s,r}}, \pi_{\Lambda_{s,r+1}})) \leq 0,8 T s^3 q^{2s}. \quad (2)$$

Пусть $\nu = \nu(T)$ — максимальная из длин отрезков, плотно заполненных единицами, которые начинаются в моменты времени от 1 до T ,

$$s_0 = s_0(T) = \left\lfloor \frac{\ln T}{\ln(1/q)} \right\rfloor, \quad (3)$$

где через $[x]$ обозначена целая часть числа x .

Теорема 3. Пусть $T \rightarrow \infty$, а значение $s_0(T)$ определено формулой (3). Тогда

$$\mathbf{P}\{\nu(T) < s_0(T) + k\} = \exp \left\{ -\frac{T c q^{s_0(T)+k}}{1-q} \right\} + o(1) \quad (4)$$

равномерно по всем $k \geq k(T)$, где $k(T)$ удовлетворяет соотношениям

$$k(T) + \frac{1}{2 \ln(1/q)} (\ln T - 3 \ln \ln T) \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

$$k(T) + \left(\frac{1}{\ln(1/q)} - \frac{1}{\ln(1/q_1)} \right) \ln T \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00078a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barbour A. D., Holst L., Janson S.* Poisson Approximation. Oxford: Oxford Univ. Press, 1992.
2. *Golic J. D.* Constrained embedding probability for two binary strings. *SIAM J. Discrete Math.*, 1996, v. 9, № 3, p. 360–364.
3. *Михайлов В. Г., Меженная Н. М.* Оценки для вероятности плотного вложения одной дискретной последовательности в другую. — *Дискретн. матем.*, 2005, т. 17, в. 3, с. 19–27.
4. *Меженная Н. М.* Предельные теоремы для числа плотных серий в случайной последовательности. Научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов МИЭМ. М.: МИЭМ, 2008, с. 11–13.