А. Р. Симонян, Е. И. Улитина (Сочи, СГУТиКД). **О дискретных характеристиках в модели $GI|G|1|\infty$.**

В одноканальную систему обслуживания с ожиданием в случайные моменты времени $\{t_n\}$, где $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots$, поступают одиночные вызовы. Вызовы пронумерованы в порядке поступления числами $1, 2, \ldots$. Время обслуживания n-го вызова, $n \geqslant 1$, обозначим v_n и пусть $u_n = t_n - t_{n-1}$, $t_0 = 0$.

Последовательности $\{v_n\}$ и $\{u_n\}$ неотрицательных случайных величин (СВ) определены на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, F, P).

Последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ независимы (друг от друга) и образуют последовательности независимых одинаково распределенных (НОР) СВ с функциями распределения (ФР) $A(t)$ и $B(t)$ на $\mathbf{R}^+$ соответственно.

По классификации Кендалла описанную модель обозначают $GI|G|1|\infty$.

Предполагаем $A(+0) = 0$ и $B(+0) = 0$. Первое условие влечет $\mathbf{P}\{0 < t_1 < t_2 < \cdots\} = 1$, где $\mathbf{P}$ — знак вероятности. Второе условие означает, что вероятность «мгновенного» обслуживания равна нулю.

Основное уравнение связывает СВ w_{n+1} и w_n, $n \geqslant 1$. Именно, при $n \geqslant 1$ справедливо равенство

$$w_{n+1} = \max\{0, w_n + X_n\}, \tag{1}$$

где $X_n = v_n - u_{n+1}$ и $\{X_n\}$ — последовательность НОР СВ с ФР

$$K(x) = \int_0^\infty (1 - A(y - x))\, dB(y), \qquad x \in \mathbf{R}^1.$$

Равенство (1) называют *основным* уравнением модели $GI|G|1|\infty$.

В терминах ФР основное уравнение записывается в виде

$$W_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^x W_n(x - y)\, dK(y), \qquad x > 0, \quad n \geqslant 1,$$

где $W_n(x) = \mathbf{P}\{w_n < x\}$.

Если в момент 0 модель свободна от вызовов, то

$$w_{n+1} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \left(\sum_{i=k}^n X_i \right). \tag{2}$$

Согласно (2), при $x > 0$ и $n \geqslant 1$

$$W_{n+1}(x) = \mathbf{P}\left\{ \max_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k < x \right\},$$

где $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ и $S_0 = 0$.

Суммарный *простой* прибора I_n, $n \geqslant 1$, за $[0, t_n]$ связан с w_n. Именно, $I_1 = t_1$, $I_n - I_1 = w_n - S_{n-1}$, $n \geqslant 2$, откуда и из (2) находим $I_n - I_1 = -\min_{0 \leqslant k \leqslant n-1} S_k$, $n \geqslant 1$.

Пусть $N_1^+ = \min\{n\colon\ S_n \geqslant 0\}$, $N_k^+ = \min\{n\colon\ S_n \geqslant S_{\overline{N}_{k-1}^+}\}$, $\overline{N}_1^+ = \min\{n > 0\colon\ S_n \geqslant 0\}$, $\overline{N}_k^+ = \min\{n > \overline{N}_{k-1}^+\colon\ S_n \geqslant S_{\overline{N}_{k-1}^+}\}$.

Аналогично определяются $N_1^-, N_k^-, \overline{N}_1^-, \overline{N}_k^-$ для последовательности $\{-S_n\}$.

Обозначим $A^+(x) = \mathbf{P}\{u_k^+ < x\}$ и $A^-(x) = \mathbf{P}\{u_k^- < x\}$, где $u_k^+ = S_{N_k^+} - S_{N_{k-1}^+}$ и $u_k^- = -(S_{\overline{N}_k^-} - S_{\overline{N}_{k-1}^-})$, $k \geqslant 1$.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *В модели* $GI|G|1|\infty$ *при дисциплине* FIFO *и поступлении в свободную модель вызова в момент* 0 *при* $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ *и целом* $n \geqslant 1$ *справедливо*

$$\mathbf{P}\left\{w_n < x,\, I_{n+1} < y\right\} = \sum_{m=0}^{n} \Big(A^{+}(x)\Big)^{m_*} \Big(A^{-}(y)\Big)^{(n-m)_*}.$$