

А. А. С и л а е в, В. М. Х а м е т о в Москва, МИЭМ. **Оценка границ спреда Европейского опциона.**

1. *Введение.* Основываясь на результатах работы [1], в докладе приводится оценка границ спреда [2] Европейского опциона.

2. *Постановка задачи.* Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t \in N_0}, P)$, $N_0 \triangleq \{0, \dots, N\}$, задана d -мерная случайная последовательность $(S_t, \mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$, которая описывает эволюцию стоимостей d рискованных активов [2]. Положим для любого $t \in N_0$ $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S \triangleq \sigma\{S_0, \dots, S_t\}$ и $\mathcal{F}_N^S = F$. Пусть $f_N(S.)$ — $\mathcal{F}_N$ -измеримая случайная величина (платежное обязательство [2]).

Обозначим $\mathcal{P}_N(S, P)$ множество вероятностных мер на $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t \in N_0})$, эквивалентных мере P .

Пусть $(\gamma_t, \mathcal{F}_t)_{t \in N_1}$ ($N_1 \triangleq \{1, \dots, N\}$) — предсказуемая d -мерная последовательность. Множество таких последовательностей обозначим $D_0^N(P)$. Обозначим $D_{t+1}^N(P)$ ($D_t(P)$) сужение $D_0^N(P)$ на множество $\{t+1, \dots, N\}$ ($\{t\}$) и будем использовать обозначение $\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N(P)$ ($\gamma \in D_t(P)$).

Пару $(Q, \{\gamma_t\}_{t \in N_1}) \in \mathcal{P}_N(S, P) \times D_0^N(P)$ назовем *бистратегией*. Обозначим

$$I^{Q, \gamma_{t+1}^N}(t, S_0^t) \triangleq M^Q \left[\exp \left\{ f_N(S.) - \sum_{i=t+1}^N (\gamma_i, \Delta S_i) \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Бистратегию $(Q, \{\gamma_t\}_{t \in N_1})$ назовем *допустимой*, если P -п. н. $I^{Q, \gamma_1^N}(0, S_0) < \infty$. Множество допустимых бистратегий обозначим $\overline{\mathcal{P}}_N(S, P) \times \overline{D}_0^N(P)$. Для любого $t \in N_0$ обозначим

$$\overline{V}_t \triangleq P - \operatorname{essinf}_{\gamma_{t+1}^N \in \overline{D}_{t+1}^N(P)} \operatorname{esssup}_{Q \in \overline{\mathcal{P}}_N(S, P)} I^{Q, \gamma_{t+1}^N}(t, S_0^t),$$

$$\underline{v}_t \triangleq P - \operatorname{essinf}_{\gamma_{t+1}^N \in \overline{D}_{t+1}^N(P)} \operatorname{essinf}_{Q \in \overline{\mathcal{P}}_N(S, P)} I^{Q, \gamma_{t+1}^N}(t, S_0^t).$$

Очевидно, что $\underline{v}_t \leq \overline{V}_t$ P -п. н. для любого $t \in N_0$.

Через $\mathcal{M}_N(S, P)$ ($\subset \mathcal{P}_N(S, P)$) обозначим множество мартингалльных мер [2]. Везде ниже мы полагаем, что $\mathcal{M}_N(S, P) \neq \emptyset$. *Верхней стоимостью Европейского опциона* называют величину, равную $\sup_{Q \in \mathcal{M}_N(S, P)} M^Q f_N(S.)$, *нижней стоимостью* — $\inf_{Q \in \mathcal{M}_N(S, P)} M^Q f_N(S.)$, а разность $\sup_{Q \in \mathcal{M}_N(S, P)} M^Q f_N(S.) - \inf_{Q \in \mathcal{M}_N(S, P)} M^Q f_N(S.)$ называют *спредом* [2].

3. *Оценка сверху верхней стоимости Европейского опциона.*

Теорема 1. Пусть фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$ — универсально полна. Тогда $(\overline{V}_t, \mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению P -п. н.

$$\begin{cases} \overline{V}_t = P - \operatorname{essinf}_{\gamma \in \overline{D}_{t+1}(P)} \operatorname{esssup}_{Q \in \overline{\mathcal{P}}_N(S, P)} M^Q [\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t], \\ \overline{V}_t |_{t=N} = e^{f_N(S.)}. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть для любого $t \in N_1$ выполнено одно из условий:

i) существует такая мера $\hat{Q} \in \overline{\mathcal{P}}_N(S, P)$, что P -п. н.

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} M^{\hat{Q}} [\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}] = \infty,$$

ii) существует такая мера $\hat{Q} \in \overline{\mathcal{P}}_N(S, P)$, что для любого $t \in N_1$

$$\hat{Q}(\Delta S_t > 0 | \mathcal{F}_{t-1}) > 0, \quad \hat{Q}(\Delta S_t < 0 | \mathcal{F}_{t-1}) > 0 \quad P - \text{п. н.}$$

Тогда существуют такие $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1} \in \overline{D}_0^N(P)$ и возрастающая случайная последовательность $(C_t, \mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$ ($C_0 = 0$), что P -н. н.

$$f_N(S.) = \ln \overline{V}_0 + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) - C_N.$$

Из теоремы 2 следует оценка сверху верхней стоимости Европейского опциона на неполном рынке.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, а множество $\overline{\mathcal{P}}_N(S, P)$ — слабо компактно. Тогда существует такая мера $Q^* \in \mathcal{M}_N(S, P)$, что:

$$i) \overline{V}_0 = M^{Q^*}[\exp\{f_N(S.) - \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i)\} | \mathcal{F}_0],$$

$$ii) \ln \overline{V}_0 \geq \sup_{Q \in \mathcal{M}_N(S, P)} M^Q f_N(S.).$$

4. Оценка снизу нижней стоимости Европейского опциона.

Теорема 4. Пусть фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$ — универсально полна. Тогда $(\underline{v}_t, \mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению P -н. н.

$$\begin{cases} \underline{v}_t = P - \operatorname{essinf}_{\gamma_{t+1} \in \overline{D}_{t+1}(P)} \operatorname{esssup}_{Q \in \overline{\mathcal{P}}_N(S, P)} M^Q[\underline{v}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t], \\ \underline{v}_t |_{t=N} = e^{f_N(S.)}. \end{cases}$$

Теорема 5. Пусть выполнено условие теоремы 4 для любого $t \in N_1$

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \operatorname{essinf}_{Q \in \overline{\mathcal{P}}_N(S, P)} M^Q[\underline{v}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}] = \infty.$$

Тогда для любых t и меры $Q \in \overline{\mathcal{P}}_N(S, P)$ существует такое $\{\hat{\gamma}_t\}_{t \in N_1} \in \overline{D}_0^N(P)$, что P -н. н.

$$\underline{v}_t \leq P - \operatorname{essinf}_{\gamma_{t+1} \in \overline{D}_{t+1}(P)} M^Q[\underline{v}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t] = M^Q[\underline{v}_{t+1} e^{-(\hat{\gamma}_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t].$$

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда относительно любой меры $Q \in \overline{\mathcal{P}}_N(S, P)$ существует такая возрастающая последовательность $(d_t, \mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$ ($d_0 = 0$), что P -н. н.

$$f_N(S.) = \ln \underline{v}_0 + \sum_{i=1}^N (\hat{\gamma}_i, \Delta S_i) + d_N.$$

Из теорем 5 и 6 следует оценка снизу нижней стоимости Европейского опциона на неполном рынке.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 5 и $\overline{\mathcal{P}}_N(S, P)$ — относительно слабо компактно. Тогда существует такая мера $Q_* \in \mathcal{M}_N(S, P)$, что:

$$i) \underline{v}_0 = M^{Q_*}[\exp\{f_N(S.) - \sum_{i=1}^N (\hat{\gamma}_i, \Delta S_i)\} | \mathcal{F}_0],$$

$$ii) \ln \underline{v}_0 \leq \inf_{Q \in \mathcal{M}_N(S, P)} M^Q f_N(S.).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07-01-00541.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояринцева Н. С., Хаметов В. М. Новая теорема о представлении мартингалов (дискретное время). — Матем. заметки, 2004, т. 75, в. 1, с. 40–54.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики (теория). М.: Фазис, 1998, 1017 с.