А. Н. Т и м а ш е в (Москва, ТВП)**. Об асимптотических разложениях для полиномиального распределения.**

Рассматривается полиномиальная схема n испытаний с N исходами в каждом испытании и вероятностями исходов $p_1,\dots,p_N$; $N\geqslant 2$; $p_1+\dots+p_N=1$. Далее считаем, что значение N фиксировано. Если $k_1,\dots,k_N$ — целые неотрицательные числа, для которых $k_1+\dots+k_N=n$, и $(\xi_1,\dots,\xi_N)$ — вектор частот исходов в этой схеме испытаний, то

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k_1;\dots;\xi_N=k_N\}=\frac{n!}{k_1!\cdots k_N!}p_1^{k_1}\cdots p_N^{k_N}. \qquad (1)$$

Считая, что

$$p_j=p_j(n); \qquad j=1,\dots,N,$$

будем предполагать, что существует постоянная $\delta\in(0,\frac{1}{N}]$, для которой

$$\min_{1\leqslant j\leqslant N}\{p_j(n)\}\geqslant\delta; \qquad n=2,3,\dots \qquad (2)$$

Кроме того, пусть

$$k_j=np_j+x_j\sqrt{np_j}; \qquad j=1,\dots,N, \qquad (3)$$

тогда

$$\sum_{j=1}^{N}x_j\sqrt{p_j}=0. \qquad (4)$$

Теорема. *Пусть при условиях* (1)–(4) *и* $n\to\infty$

$$x_j=x_j(n)=o(\sqrt{n}); \qquad j=1,\dots,N.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k_1;\dots;\xi_N=k_N\}=(2\pi n)^{-(N-1)/2}\frac{1}{\sqrt{p_1\cdots p_N}}$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}x_j^2+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{(s+1)(s+2)n^{s/2}}\sum_{j=1}^{N}p_j^{-s/2}x_j^{s+2}\right)\left(1+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)\right), \qquad (5)$$

где $x=\max_{1\leqslant j\leqslant N}|x_j|$ *и ряд в* (5) *сходится абсолютно при всех достаточно больших значениях* n. *Этот ряд является асимптотическим разложением в том смысле, что если при* $n\to\infty$

$$x_j=o(n^{(M+1)/(2M+6)}); \qquad j=1,\dots,N,$$

то

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k_1;\dots;\xi_N=k_N\}=(2\pi n)^{-(N-1)/2}\frac{1}{\sqrt{p_1\cdots p_N}}$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}x_j^2+\sum_{s=1}^{M}\frac{(-1)^{s-1}}{(s+1)(s+2)n^{s/2}}\sum_{j=1}^{N}p_j^{-s/2}x_j^{s+2}\right)$$
$$\times\left(1+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{x^{M+3}}{n^{(M+1)/2}}\right)\right), \qquad (6)$$

где $M=0,1,\dots$ (*при* $M=0$ *пустая сумма в* (6) *считается равной нулю*).

З а м е ч а н и е 1. В несколько иной форме записи (более громоздкой по сравнению с (6)) асимптотические разложения для полиномиального распределения получены в [2] (см. также [3]).

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы* $x_j = o\,(n^{1/6})$; $j = 1, \ldots, N$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\,\{\xi_1 = k_1; \ldots ; \xi_N = k_N\} = (2\pi n)^{-(N-1)/2} \frac{1}{\sqrt{p_1 \cdots p_N}}$$
$$\times \exp\biggl(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} x_j^2 \biggr)\biggl(1 + O\biggl(\frac{x + x^3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\biggr)\biggr). \tag{7}$$

З а м е ч а н и е 2. В [1] показано, что если $x_j = O\,(1)$, $j = 1, \ldots, N$, и $p_j = p_j(n)$ при $n \to \infty$ меняются так, что $np_j \to \infty$, $j = 1, \ldots, N$, то оценка (7) справедлива с заменой остаточного члена $O(\frac{x+x^3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n})$ на выражение

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{p_j}}\biggl(\frac{x_j^3}{6} - \frac{x_j}{2}\biggr) + O\biggl(\frac{1}{np_0}\biggr),$$

где $p_0 = \min_{1\leqslant j\leqslant N}\{p_j\}$.

Это утверждение следует из (1), (3), (4) и формулы Стирлинга, если учесть, что

$$\prod_{j=1}^{N}\biggl(1 + \frac{x_j}{\sqrt{np_j}}\biggr)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{N}\frac{x_j}{\sqrt{p_j}} + O\biggl(\frac{1}{np_0}\biggr).$$

Следствие 2. *Пусть* $\xi \sim B(n,p)$; $p = p(n) \in [\delta, 1-\delta]$; $n = 2, 3, \ldots$; $\delta = \mathrm{const} \in (0, \frac{1}{2}]$, *и пусть* $k = np + y\sqrt{np(1-p)}$ *— целое число, причем* $y = y(n) = o\,(\sqrt{n})$ *при* $n \to \infty$.
Тогда

$$\mathbf{P}\,\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$$
$$\times \exp\biggl(-\frac{y^2}{2} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}y^{s+2}}{(s+1)(s+2)n^{s/2}}\biggl((-1)^s p\biggl(\frac{p}{1-p}\biggr)^{s/2} + (1-p)\biggl(\frac{p}{1-p}\biggr)^{-s/2}\biggr)\biggr)$$
$$\times \biggl(1 + O\biggl(\frac{|y|}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\biggr)\biggr). \tag{8}$$

З а м е ч а н и е 3. Оценка (8) — это известная формула А. Я. Хинчина [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калинин В. М., Шалаевский О. В.* Исследования по классическим проблемам теории вероятностей и математической статистики. Ч. II. — Записки научн. семинаров ЛОМИ, 1972, т. 26, с. 3–152.
2. *Калинин В. М.* Сходящиеся и асмптотические разложения для вероятностных распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. XII, в. 1, с. 24–38.
3. *Калинин В.М.* Гамма-функция и вероятностные предельные теоремы. — Труды МИАН им. В. А. Стеклова АН СССР, 1970, т. 111, с. 163–194.
4. *Хинчин А. Я.* Об одной предельной теореме в теории вероятностей. — В кн.: А. Я. Хинчин. Избранные труды по теории вероятностей. М.: ТВП, 1995, с.118–125.