

А. Н. Т и м а ш е в (Москва, ТВП). **Об асимптотических разложениях для многомерного гипергеометрического распределения.**

Многомерное гипергеометрическое распределение случайного вектора $(\mu_1, \dots, \mu_s)$ определяется условиями:

$$\mathbf{P}\{(\mu_1, \dots, \mu_s) = (k_1, \dots, k_s)\} = (C_N^n)^{-1} C_{M_1}^{k_1} \dots C_{M_s}^{k_s}, \quad (1)$$

если $k_1, \dots, k_s$ — такие целые неотрицательные числа, что $k_1 + \dots + k_s = n$, $k_j \leq M_j$, $j = 1, \dots, s$ и $\mathbf{P}\{(\mu_1, \dots, \mu_s) = (k_1, \dots, k_s)\} = 0$ в остальных случаях.

В равенстве (1) $n, N, s, M_1, \dots, M_s$ — целые положительные числа, для которых $n < N$, $s \geq 2$, $M_1 + \dots + M_s = N$. Далее считаем, что $s = \text{const}$,

$$p_j = p_j(N) = \frac{M_j}{N}, \quad j = 1, \dots, s, \quad (2)$$

$$\beta = \beta(N) = \frac{n}{N}. \quad (3)$$

Из этих условий следует, что $p_1 + \dots + p_s = 1$. Кроме того, $\mathbf{E} \mu_j = np_j = \beta N p_j$, $j = 1, \dots, s$.

Будем также предполагать, что существует такая постоянная ε , что

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\beta(1-\beta)}{s} \min\{p_1, \dots, p_s\}. \quad (4)$$

Получены асимптотические разложения для локальных вероятностей (1), если $k_j = k_j(N) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ так, что

$$k_j = \beta N p_j + y_j \sqrt{\beta(1-\beta)N p_j}, \quad (5)$$

$$y_j = o(\sqrt{N}), \quad j = 1, \dots, s. \quad (6)$$

Эти разложения имеют вид сходящихся степенных рядов и могут быть использованы для практических расчетов.

При условиях (1)–(4) равенства (5), (6) означают, что $k_j \sim \mathbf{E} \mu_j$, $j = 1, \dots, s$. Эти равенства определяют область больших (по Г. Крамеру) отклонений случайного вектора $(\mu_1, \dots, \mu_s)$. Локальные и интегральные теоремы в области сверхбольших отклонений этого вектора получены автором в [1].

Теорема. Пусть при условиях (1)–(4) целые положительные числа $k_j = k_j(N) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ так, что выполнены соотношения (5), (6), $j = 1, \dots, s$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{(\mu_1, \dots, \mu_s) = (k_1, \dots, k_s)\} &= (2\pi\beta(1-\beta)N)^{-(s-1)/2} \frac{1}{\sqrt{p_1 \dots p_s}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^s y_j^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{(k+1)(k+2)N^{k/2}} \sum_{j=1}^s p_j^{-k/2} y_j^{k+2} \right\} \\ &\times \left(1 + O \left(\frac{y}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N} \right) \right), \quad y = \max_{1 \leq j \leq s} |y_j|, \\ \gamma_k &= (-1)^{k-1} (1-\beta) \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right)^{-k/2} - \beta \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right)^{k/2}, \quad k = 1, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Ряд в (7) при всех достаточно больших значениях N сходится и является асимптотическим разложением в том смысле, что если

$$y_j = o \left(N^{(M+1)/(2M+6)} \right), \quad j = 1, \dots, s,$$

то равенство (7) остается справедливым с заменой суммы ряда на его частичную сумму, содержащую первые M слагаемых, и остаточного члена вида $O(y/\sqrt{N} + 1/N)$ на $O(y/\sqrt{N} + 1/N + y^{M+3}/N^{(M+1)/2})$, $M = 0, 1, \dots$

З а м е ч а н и е 1. Если $\beta = \frac{1}{2}$ или $p_1 = \dots = p_s = 1/s$, то остаточный член в (7) можно заменить на $O(1/N)$.

Следствие. Если в условиях теоремы $s = 2$, $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{(\mu_1, \mu_2) = (k_1, k_2)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta(1-\beta)p(1-p)N}} \\ &\times \exp\left\{-\frac{y_1^2}{2(1-p)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k y_1^{k+2}}{(k+1)(k+2)N^{k/2}}\right\} \\ &\times \left(1 + O\left(\frac{|y_1|}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N}\right)\right), \\ \delta_k &= \gamma_k \left(p^{-k/2} - p^{(k+2)/2}(p-1)^{-k-1}\right), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

З а м е ч а н и е 2. Для случая $s = 2$ в иной форме записи (более громоздкой по сравнению с (8)) асимптотические разложения гипергеометрического распределения получены в [2].

З а м е ч а н и е 3. При $s = 2$ асимптотические разложения, связанные с биномиальной и пуассоновской аппроксимациями гипергеометрического распределения, найдены в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимашев А. Н. Интегральные теоремы о больших отклонениях для многомерного гипергеометрического распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 1, с. 71–79.
2. Калинин В. М. Предельные свойства вероятностных распределений. — Труды МИАН им. В. А. Стеклова АН СССР, 1968, т. 104, с. 88–134.
3. Тимашев А. Н. Сходящиеся и асимптотические разложения при аппроксимациях одномерного гипергеометрического распределения. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2003, т. 10, в. 1, с. 231–233.