

Ю. Л. П а в л о в, И. А. Ч е п л ю к о в а (Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН). **Распределения степеней вершин в условных случайных графах Интернет-типа.**

При изучении структуры и функционирования сложных сетей телекоммуникаций, в частности, Интернета, часто используются случайные графы. Рассмотрим одну из наиболее известных моделей (см., например, [1]). Пусть граф содержит N вершин, степени которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\eta_1, \dots, \eta_N$, для которых

$$p_k = \mathbf{P} \{ \eta_1 = k \} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

В случае, если сумма степеней нечетна, вводится дополнительная вершина с единичной степенью. Образование ребер происходит так, что графы, у которых степени всех вершин одинаковы, равновероятны.

Для исследования асимптотического поведения таких объектов, а в некоторых случаях и при моделировании реальных сетей, полезно использовать подмножество случайных графов Интернет-типа, сумма степеней вершин которых задана и равна n . Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ такие, что

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P} \{ \xi_1 = k \} = \lambda^k p_k (1 - (1 - \lambda) \Phi(\lambda, \tau, 1))^{-1},$$

где $k = 1, 2, \dots$, $0 < \lambda < 1$,

$$\Phi(\lambda, \tau, 1) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} / j^{\tau}.$$

Нетрудно проверить, что для рассматриваемого подмножества графов справедливо равенство

$$\mathbf{P} \{ \eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N \} = \mathbf{P} \{ \xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n \},$$

следовательно, выполнены условия обобщенной схемы размещения [2]. С помощью этой схемы нами найдены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < n/N < \zeta(\tau)$, где $\zeta(\tau)$ — значение дзета-функции Римана в точке τ .

Обозначим μ_r число вершин степени r и пусть

$$m = \mathbf{E} \xi_1, \quad \sigma^2 = \mathbf{D} \xi_1, \quad \sigma_{rr}^2 = p_r(x)(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m - r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda)).$$

Приведем один из полученных результатов.

Теорема. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \zeta(\tau)$, а λ является решением уравнения $m = n/N$. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $u_r = (k - N p_r(\lambda)) / (\sigma_{rr} \sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P} \{ \mu_r = k \} = (\sigma_{rr} \sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)).$$

Данный пример использования обобщенной схемы размещения для изучения случайных графов приводится впервые.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-01-00007а и гранта НШ 4129.2006.1 Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. — Performance Evaluation, 2004, v. 55, p. 3–23.
2. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000, 256 с.