

Р. Б. Зайнетдинов (Ульяновск, УлГУ). **О моделировании управляемых механических систем с переменными массами.**

Представлено решение задачи синтеза управления, стабилизирующего обобщенное стационарное движение механической системы с переменными массами.

Движение механической системы с переменными массами $m_\lambda = m_\lambda(t)$ ($\lambda = 1, \dots, N$), стесненную стационарными голономными связями, такими, что ее положение определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$, может быть описано уравнениями [1]

$$\frac{d^0}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + \Psi, \quad (1)$$

где вектор $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)'$, кинетическая энергия системы $T = T_2 + T_1 + T_0 = \frac{1}{2}(\dot{q})'A(m(H, q)\dot{q} + \dot{q}'B(m(t), q) + C(m(t), q)$, $Q = Q(t, q, \dot{q})$, $\Psi = \Psi(t, q, \dot{q})$ есть соответственно равнодействующие обобщенных активных и реактивных сил, через d^0/dt и $(\cdot)'$ обозначены соответственно производные при закрепленных массах и операция транспонирования.

В ряде актуальных задач управления движениями механических систем имеет место следующая структура системы и действующих сил: кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}(\dot{r})'A_1\dot{r} + \dot{r}'B_1 + g(\dot{r})'A_2\dot{s} + \frac{1}{2}g(\dot{s})'A_3\dot{s} + g\dot{s}'B_2 + C$, $r = (q_1, q_2, \dots, q_m)'$, $s = (q_{m+1}, \dots, q_n)'$, $A_1 \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $B_1 \in \mathbf{R}^m$, $A_2 \in \mathbf{R}^{m \times (n-m)}$, $A_3 \in \mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $B_2 \in \mathbf{R}^{n-m}$, $g \in \mathbf{R}$, при этом T не зависит явно от s , g , зависит только от переменных масс $m_\lambda = m_\lambda(t)$, и не зависят от масс A_2 , A_3 , B_2 ; $Q = (Q^r, Q^s)$, $Q^s \equiv 0$, $\Psi = (\Psi^r, \Psi^s)$, $\Psi^s = \Psi^s(t)$,

$$Q^r + \Psi^r - A_2 A_3^{-1} \Psi^s = - \frac{\partial \Pi(t, m_\lambda(t), r)}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}},$$

где $\Pi = \Pi(t, m_\lambda(t), r)$ и $\Phi = \frac{1}{2}(\dot{r})'F(t, r)\dot{r}$, $F \in \mathbf{R}^{m \times m}$ есть некоторые скалярные функции, определяющие действие потенциальных и диссипативно-ускоряющих сил.

Для таких моделируемых систем уравнения движения (1) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^0}{dt} \left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial R_2}{\partial r} &= - \frac{\partial W}{\partial r} + G\dot{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}}, \\ \frac{ds}{dt} &= \dot{s}, \quad \dot{s} = A_3^{-1}(r)(p(t, c) - B_2(r) - A_2'(r)\dot{r}), \\ p(t, c) &= \int_{t_0}^t \frac{\Psi^s(\tau)}{g(m_\lambda(\tau))} d\tau + c, \end{aligned} \quad (2)$$

где $2R_2 = (\dot{r})'D\dot{r}$, $D = (A_1 - gA_2A_3^{-1}A_2')$, $G \in \mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $G' = -G$, W есть скалярная функция типа приведенной потенциальной энергии [2], [3].

Если $\partial W / \partial r = 0$ при $r = r_0$, $c = c_0$, то система (2) имеет обобщенное стационарное движение вида

$$\dot{r} = 0, \quad r = r_0 = \text{const}, \quad \dot{s} = \dot{s}_0(t), \quad s(t) = \int_{t_0}^t \dot{s}_0(\tau) \tau + s_0. \quad (3)$$

Выводится следующий критерий стабилизируемости этого движения.

Пусть обобщенное стационарное движение (3) изолировано при $c = c_0$, таким образом, что

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial q} \right\| \geq \varepsilon \quad \text{для любых} \quad t \geq 0, \quad r \in \{0 < \varepsilon \leq \|r - r_0\| \leq H_0\}, \quad c = c_0,$$

функция $W_1 = W(t, m(t), r, c_0) - W(t, m(t), r_0, c_0)$ определено-положительна по $r - r_0$; действие активных и реактивных сил таково, что, при $c = c_0$,

$$\sum_{\lambda=1}^N \frac{\partial R_2}{\partial m_\lambda} \dot{m}_\lambda - 2\Phi \leq \mu_1(t) R_2,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{\lambda=1}^N \frac{\partial W_1}{\partial m_\lambda} \dot{m}_\lambda \leq \mu_2(t) W_1, \quad \int_0^\infty \mu(t) dt \leq M = \text{const},$$

где $\mu(t) = \max(\mu_1(t), \mu_2(t))$, при этом для предельных к $(\mu_1(t), \mu_2(t))$ значений $(\mu_1^*(t), \mu_2^*(t))$ имеет место неравенство $\mu_1^*(t) \neq \mu_2^*(t)$.

Тогда обобщенное стационарное движение (3) устойчиво, асимптотически устойчиво относительно движений, для которых $c = c_0$.

Этот результат следует из общих теорем [4]. Он развивает и обобщает соответствующие выводы работ [2], [3] и для случая, когда изменениями масс системы можно пренебречь.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00765).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новоселов В. С. Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969, 240 с.
2. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967, 276 с.
3. Карпетян А. В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998, 160 с.
4. Андреев А. С., Перегудова О. А. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости. — Прикл. матем. и мех., 2006, т. 70, в. 6, с. 965–976.