К. А. В о л о с о в (Москва, МГУПС)**. Модифицированный способ построения решений уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.**

В работах [1], [2] предложен способ построения решений широкого класса уравнений с частными производными в явном и параметрическом видах. Метод распространяется на многомерный случай и уравнения с переменными коэффициентами. В. П. Маслов представил работу по этой теме в журнал «Доклады РАН».

Коротко опишем суть метода. Пусть дано уравнение с частными производными второго порядка $AS(x,t) = 0$ произвольного типа, где A — дифференциальный оператор с частными производными второго порядка. В уравнении с частными производными с неизвестной функцией $S(x,t)$ делаем не фиксированную замену переменных $S(x,t)_{x=x(\xi,\delta),t=t(\xi,\delta)} = U(\xi,\delta)$ и переходим от скалярного уравнения к эквивалентной системе четырех уравнений первого порядка для некоторой вектор функции. Два уравнения типа соотношения для потоков, само исходное уравнение, и равенство смешанных производных $S''_{xt} = S''_{tx}$. Поясним, что последнее равенство является необходимым условием разрешимости двух первых соотношений. Четыре уравнения в частных производных первого порядка описывают все поля направлений, связанные с исходным уравнением с частными производными, и эквивалентны ему. Если рассматривать эту систему, как нелинейную алгебраическую, то она разрешается единственным образом относительно производных

$$x'_\xi = g_1(\xi,\delta), \quad x'_\delta = g_2(\xi,\delta), \quad t'_\xi = g_3(\xi,\delta), \quad t'_\delta = g_4(\xi,\delta). \tag{1}$$

Правые части системы (1) зависят от неизвестных функций и коэффициентов исходного уравнения $U(\xi,\delta)$, $Y(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$ и явно выписываются.

Необходимым условием разрешимости приведенной системы является равенство смешанных производных

$$x''_{\xi\delta} = x''_{\delta\xi}, \quad t''_{\xi\delta} = t''_{\delta\xi}. \tag{2}$$

Центральный результат работ [1], [2] заключен в следующей теореме.

Теорема. *Существует тождество*:

$$({g_1}'_\delta - {g_2}'_\xi)/T \equiv ({g_3}'_\delta - {g_4}'_\xi)/Y. \tag{3}$$

Т. е. левая часть по форме записи совпадает с правой. Таким образом, вместо двух соотношений (2) *имеем одно соотношение на три функции* $U(\xi,\delta), Y(\xi,\delta), T(\xi,\delta)$, *а именно условие разрешимости имеет вид*

$$g'_{3\delta} - g'_{4\xi} = 0. \tag{4}$$

Это новое, ранее скрытое свойство дифференциальных уравнений с частными производными, на его основе можно строить точные решения. Уравнение с частными производными второго порядка сопроваждает новая система дифференциальных уравнений первого порядка (1), (см. [1–2], [8]). В указанных работах успешно получены решения классических полулинейных уравнений [8], среди них есть и новые.

В [3–5] рассмотрены задачи оптимального управления колебаниями маятника, находящегося под воздействием гауссовских случайных возмущений. Цель управления — минимизация потенциальной или кинетической энергии. Построено точное решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Работа [3] представлена в журнал «Доклады РАН» Ф. Л. Черноусько. Решение этого квазилинейного параболического уравнения с переменными коэффициентами локализовано, т. е. имеется область в которой решение непрерывным образом сопряжено с областью, где решение тождественно равно нулю. Эта теория подробно описана, например, в [5, 6]. Решение данной задачи выражается через решения задачи Коши для линейного параболического уравнения. Построен синтез оптимального управления.

Эту задачу будем называть эталонной. Задача подробно описана и решена в [3–5]. Таким образом имеется возможность построить решение подобной задачи методом описанным в [1, 2] и вначале данной работы.

Рассмотрим задачу оптимального управления колебаниями маятника находящегося под воздействием гауссовских и пуассоновских случайных возмущений при наличии трения. Цель управления — минимизация потенциальной или кинетической энергии. Сначала производится понижение порядка системы по методике предложенной в работах Ф. Л. Черноусько, учитывая специфику функционалов, которые минимизируются в данной задаче. Эта процедура подробна описана во многих работах Ф. Л. Черноусько и других авторов, ссылки на которые приведены в работах [3–5]. Переменная, которую следует ввести, при наличии трения, впервые описана в [7]. Далее выводится уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана относительно функции трех переменных $S(y, q, \tau)$.

К нему применяется предложенный метод. В результате работы, представленной данным сообщением, строится точное решение, которое без пуассоновских случайных возмущений выражается через решения задачи Коши для линейного параболического уравнения. При наличии пуассоновских случайных возмущений выражается через решения уравнения Колмогорова. Начальные данные остаются произвольными.

Таким образом и в других многомерных задачах данный метод может быть полезен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волосов К.А.* Новый метод построения решений квазилинейных параболических уравнений в параметрической форме. — В сб.: Герценовские чтения. 17–22.04. СПб: СПбПУ, 2006, с. 35–40.
2. *Волосов К. А.* Построения решений квазилинейных параболических уравнений в параметрической форме. — Дифференциальные уравнения, 2007, т. 43, в. 4, с. 492–497.
3. *Братусь А. С.*, *Волосов К. А.* Точные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции с интегральным ограничением на суммарный ресурс управления. — Докл. АН, 2002, т. 385, № 3, с. 319–322.
4. *Братусь А. С.*, *Волосов К. А.* Точные решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана для задач оптимальной коррекции с итнегральным ограничением на суммарный ресурс управления. — Прикл. матем. мех., 2004, т. 68, № 5, с. 819–832.
5. *Bratus A. S.*, *Volosov K. A.* Regularirization of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation in control problems. — J. Math. Sci., 2005, v. 123, № 6, p. 1542–1552.
6. *Danilov V. G.*, *Maslov V. P.*, *Volosov K. A.* Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. Dordrecht: Kluver Academic Publishers, 1995, 316 p.
7. *Братусь А. С.*, *Волосов К. А.* Асимптотическое решение в задачах оптимальной коррекции с погрешностью управляющего воздействия. — В сб.: IV международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». М.: ИПУ, 2005, с. 15, www.sicpro.org
8. *Волосов К. А.* Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами. Автореферат дисс. на соискание уч. ст. д.ф-м.н. М.: МИЭМ, 2007, 33 с.