А. В. Н е к л ю д о в (Москва, МГТУ). **Оценка среднего значения решения эллиптического уравнения второго порядка через его поток.**

Пусть в цилиндре $\Omega = (0, +\infty) \times \Omega_0 \subset \mathbf{R}^n_x$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, \widehat{x})$, задано равномерно эллиптическое уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x), \tag{1}$$

а на боковой поверхности цилиндра $\Gamma = (0, +\infty) \times \partial\Omega_0$ — краевое условие Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mu} \right|_{\Gamma} \equiv \left. \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j \right) \right|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где $(\nu_1, \ldots, \nu_n) = \vec{\nu}$ — внешняя нормаль к Γ. Коэффициенты уравнения предполагаются измеримыми функциями, обобщенные решения понимаются в смысле пространств С. Л. Соболева. Рассмотрим среднее значение решения $u(x)$ на сечении цилиндра $S_t = \Omega \cap \{x : \ x_1 = t\}$: $\overline{u}(t) = \mu_0^{-1} \int_{S_t} u \, d\widehat{x}$, где $\mu_0 = \mathrm{mes_{n-1}} \Omega_0$; и «поток тепла» решения через S_t имеет вид:

$$P(t, u) = \int_{S_t} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \, d\widehat{x}.$$

Поток $P(t, u)$ и его обобщения играют важную роль при исследовании поведения решений задачи Неймана в неограниченных областях [1]–[3]. В случае оператора Лапласа поток и среднее значение на сечении связаны очевидным соотношением $d\overline{u}(t)/dt = \mu_0^{-1} P(t, u)$, отсюда при $f \equiv 0$ с учетом того, что $P(t, u) = c_0 = \mathrm{const}$, следует, что $\overline{u}(t) = c_1 t + c_2$; $c_1, c_2 = \mathrm{const}$. Для уравнения с переменными коэффициентами связь между средним значением и потоком уже является нетривиальной. Справедлив следующий результат.

Теорема. *Пусть $u(x)$ — решение (1)–(2) в Ω. Тогда для почти всех $t > 0$*

$$\overline{u}(t) = \alpha(t) P(u, t) t - \int_{\Omega(0,t)} f V \, dx + \beta(t, u),$$

где $0 < C_1 \leqslant \alpha(t) \leqslant C_2$; функция $V(x)$ определяется областью Ω и уравнением (1) и удовлетворяет условию $C_3 x_1 \leqslant V(x) \leqslant C_4 x_1$ в Ω; $|\beta(t, u)| \leqslant \gamma(u) + C_5 \int_{S_t} |\nabla u|^2 \, d\widehat{x}$; $C_k = \mathrm{const} > 0$; $\Omega(0, t) = \Omega \cap \{x : \ 0 < x_1 < t\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Олейник О. А.*, *Иосифьян Г. А.* О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей. — Матем. сб., 1980, т. 112, № 4, с. 588–610.
2. *Oleinik O. A.*, *Yosifian G. A.* On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity. — Archive Rat. Mech. and Anal., 1982, v. 78, p. 29–53.
3. *Неклюдов А. В.* О задаче Неймана для дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченной области, близкой к цилиндру. — Труды семинара имени И. Г. Петровского, 1991, т. 16, с. 192–217.