К. К. Р ы б н и к о в (Москва, МГУЛ). **Методы анализа псевдобулевых систем линейных неравенств и их приложения к изучению узлов нейросетей.**

Решение системы булевых уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, t, \tag{1}$$

представляет значительный практический интерес, т. к. является универсальной моделью электронных схем, состоящих из t технических узлов-преобразователей с n двоичными входами и одним двоичным выходом.

Одним из известных подходов к решению системы (1) является так называемый *метод разделяющих плоскостей*, основанный на идее погружения множества решений системы булевых уравнений в многогранник $M(A, b) = \{x \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$, где $A = \{a_{ij}\}$ — матрица размера $m \times n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$.

Способы построения многогранника $M(A, b)$, для которого множество решений системы (1) представляет собой подмножество (или само множество) всех $(0, 1)$-точек $M(A, b)$, рассматривались в работах Г. В. Балакина, В. Г. Никонова, Б. А. Головкина (см., например, [1, 2]).

Подобный подход, ставший известным как *метод разделяющих плоскостей* [1], позволил при анализе множества решений системы (1) использовать результаты теории многогранников и аппарат математического программирования (см., например, [3]). Так, для некоторых многогранников с малым числом вершин удалось получить оценки сложности решения систем (1) в виде полинома $P(n, t)$ [4].

В то же время, в ряде случаев оказывается плодотворной и идея использования «обратного» подхода, т. е. рассмотрения возможности анализа систем линейных псевдобулевых неравенств с помощью булевых функций-резольвент. Под псевдобулевым неравенством будем понимать неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant a_0, \quad x_j \in \{0, 1\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

О п р е д е л е н и е 1. *Минимальным покрытием* неравенства (2) называется такое множество C, $C \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, что

$$\sum_{j \in C} |a_j| > a_0 - \sum_{j=1}^{n} \min\{0, a_j\}, \tag{3}$$

причем для любого множества $C' \subset C$ свойство (3) не выполняется.

О п р е д е л е н и е 2. *Резольвентой* неравенства (3) назовем такую булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — решение неравенства (2).

Пусть L — множество всех минимальных покрытий (2). Тогда имеет место лемма Хаммера [4].

Лемма. *Дизъюнктивная форма* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vee_{C \in L} \prod_{j \in C} x_j^{a_j}$ *является резольвентой неравенства* (2), *где* $\alpha_j = 1$ *при* $a_j \geqslant 0$ *и* $\alpha_j = 0$ *при* $a_j < 0$, *причем* $x_j^1 = x_j$, *а* $x_j^0 = \overline{x}_j$.

Из леммы Хаммера и формулы включения–исключения следует теорема о числе решений псевдобулевого неравенства (2).

Теорема. *Пусть* $L = \{C_1, C_2, \ldots, C_s\}$ *— множество минимальных покрытий* (2). *Тогда это неравенство имеет*

$$N = 2^n - \sum_{j=1}^{s} 2^{n-|C_j|} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i \neq j}}^{s} 2^{n-|C_i \cup C_j|}$$

$$- \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i\neq j\neq k}}^{s} 2^{n-|C_i\cup C_j\cup C_k|} + \dots + (-1)^s 2^{n-|C_i\cup C_j\cup\dots\cup C_s|} \tag{4}$$

псевдобулевых решений.

Заметим, что для получения оценок числа N можно использовать небольшое число слагаемых в (4), например, взяв $i = 1, 2$.

В том случае, если имеется система псевдобулевых неравенств, то, определив резольвенту каждого неравенства аналогично резольвенте неравенства (2), получим резольвенту всей системы как дизъюнкцию резольвент всех ее неравенств.

Непосредственное определение всех решений системы псевдобулевых неравенств может быть получено методом направленного перебора значений переменных в многочлене, представляющем собой сумму фундаментальных произведений [5].

К решению систем p псевдобулевых неравенств сводится задача определения множества $(0,1)$-векторов размерности n, поступающих одновременно на p формальных нейронов с пороговыми функциями активации при любом фиксированном наборе их выходных $(0,1)$-сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балакин Г. В.*, *Никонов В. Г.* Методы сведения булевых уравнений к системам пороговых соотношений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1994, т. 1, в. 3, с. 389–401.
2. *Головкин Б. А.* О некоторых линейных ограничениях с булевыми переменными. — Эконом. и матем. методы, 1971, т. VII, в. 4, с. 25–31.
3. *Рыбников К. К.* Оценки сложности некоторых схем метода резделяющих плоскостей при решении систем булевых уравнений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2002, т. 9, в. 2, с. 442–443.
4. *Hammer P. L.* Boolean Elements in Combinatorial Optimization. — In: Combinatorial Programming: Methods and Applications. Dordrecht–Boston, 1968.
5. *Рыбников К. К.*, *Хохлушин А. С.* О взаимосвязях различных алгоритмических схем методов погружения множества решений системы булевых уравнений в действительную область. — Вестник МГУЛ. Лесной вестник, 2002, № 5 (25), с. 189–194.