В. И. П а г у р о в а (Москва, МГУ). **О предельных распределениях для квантилей в выборке случайного объема.**

Пусть $X_k^{(n)}$ означает k-ю порядковую статистику в вариационном ряду, построенном по n независимым одинаково распределенным величинам $X_1, X_2, \dots, X_n$ с общей абсолютно непрерывной функцией распределения (ф. р.) $F(x)$, $f(x) = F'(x)$. Рассмотрим асимптотическое распределение центральной порядковой статистики $X_{[\alpha n]+1}^{(n)}$ при $n \to \infty$, $0 < \alpha < 1$, $F(\zeta) = \alpha$. Н. В. Смирнов доказал, что если $f(\zeta) > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{X_{[\alpha n]+1}^{(n)} < y\right\} = \Phi(x), \quad y = \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}x}{\sqrt{n}f(\zeta)} + \zeta,$$

где $\Phi(x)$— ф. р. стандартного нормального закона. R. D. Reiss доказал, что если $f(\zeta) > 0$ и $f'(x)$ ограничена на всей прямой, то при $n \to \infty$

$$\sup_{x\in R} \left|\mathbf{P}\left\{X_{[\alpha n]+1}^{(n)} < y\right\} - \Phi(x)\right| = O\,(n^{-1/2}).$$

Исследуется асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величины $X_{[\alpha N]+1}^{(N)}$ в предположении, что N является неотрицательной целочисленной случайной величиной, $X_1, X_2, \dots, X_n, N$ независимы и ф. р. величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ имеет вид $F(x-a)$, где a — неизвестный параметр сдвига, $F(0) = 0$, $f(0) > 0$, $f(\zeta) > 0$, $f'(x)$ ограничена на всей прямой.

Рассмотрено два случая.

1) Пусть N имеет распределение Пуассона с параметром n, $\mathbf{P}\{N = k\} = e^{-n}n^k/k!$, $k = 0, 1, \dots$.

В предположении, что a известно, при $n \to \infty$ имеем

$$\sup_{x\in R} \left|\mathbf{P}\left\{X_{[\alpha N]+1}^{(N)} - a < y\right\} - \Phi(x)\right| = O\,(n^{-1/2}).$$

В предположении, что a неизвестно, при $n \to \infty$ имеем

$$\sup_{x\in R} \left|\mathbf{P}\left\{X_{[\alpha N]+1}^{(N)} - X_1^{(N)} < y\right\} - \Phi(x)\right| = O\,(n^{-\tau}), \qquad 0 < \tau < 1/2.$$

2) Пусть N имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $(r, 1/n)$, $\mathbf{P}\{N = k\} = C_{k+r-1}^k n^{-r}(1-1/n)^k$, $k = 0, 1, \dots$, $r \geqslant 1$ — целое.

В предположении, что a известно, при $n \to \infty$ имеем

$$\sup_{x\in R} \left|\mathbf{P}\left\{\frac{\sqrt{rn}(X_{[\alpha N]+1}^{(N)} - a - \zeta)f(\zeta)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} < x\right\} - G_{2r}(x)\right| = O\,(n^{-1/2}),$$

где $G_{2r}(x)$ — ф. р. Стьюдента с $2r$ степенями свободы и плотностью распределения

$$g_{2r}(x) = \frac{\Gamma(r+1/2)}{\sqrt{2\pi r}\Gamma(r)}\left(1 + \frac{x^2}{2r}\right)^{-r-1/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

В предположении, что a неизвестно, при $n \to \infty$ имеем

$$\sup_{x\in R} \left|\mathbf{P}\left\{\frac{\sqrt{rn}(X_{[\alpha N]+1}^{(N)} - X_1^{(N)} - \zeta)f(\zeta)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} < x\right\} - G_{2r}(x)\right| = O\,(n^{-r/(2(r+1))}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов Н. В.* Предельные законы распределения для членов вариационного ряда. — В сб.: Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1949, т. 25, с. 5–59.
2. *Reiss R. D.* On the accuracy of the normal approximation for quantiles. — Ann. Probab., 1974, v. 2, № 4, p. 741–744.
3. *Reiss R. D.* Asymptotic expansions for sample quantiles. — Ann. Probab., 1976, v. 4, № 2, p. 249–258.
4. *Беврани Х.*, *Бенинг В. Е.*, *Королев В. Ю.* О точности аппроксимации отрицательного биномиального распределения гамма-распределением и скорости сходимости распределений некоторых статистик к распределению Стьюдента. — В сб.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез, Пермь: 2005, с. 88–103.