В. Т. Дубровин (Казань, КГУ). **Скорость сходимости в центральной предельной теореме для теоретико-числовых эндоморфизмов.**

Пусть T — преобразование интервала $(0,1)$, определяемое следующим образом: $T\,t = \{\varphi(t)\}$, где $\varphi = f^{-1}$, $\{\cdot\}$ — обозначение дробной доли, f — функция, удовлетворяющая одному из условий a), b) и условию c). Сформулируем эти условия.

a) Функция f определена и убывает на $[1,\infty)$, $f(1)=1$, f строго положительна, непрерывна и строго убывает на $[1,k)$ и $f=0$ на $[k,\infty)$, где k — либо натуральное число, либо ∞ (здесь имеется в виду, что $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$). Кроме того, $|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant |x_2-x_1|$ и существует такое λ, $0<\lambda<1$, что $|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant \lambda(x_2-x_1)$, если $1+f(2)<x_1<x_2$.

b) Функция f определена и возрастает на $[0,\infty)$, $f(0)=0$, f непрерывна и строго возрастает на $[0,k)$ и $f=1$ на $[k,\infty)$, где k — либо натуральное число, либо ∞ (в этом случае $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$). Кроме того, $f(x_2)-f(x_1)<x_2-x_1$, если $0\leqslant x_2<x_1$.

c) $\mathrm{ess}_{0<x<1}\sup f'_{E_n}(x) \leqslant D \leqslant \mathrm{ess}_{0<x<1}\inf f'_{E_n}(x)$. Здесь $E_n=(a_1,a_2,\dots,a_n)$, где $a_i=[\varphi(T^i x)]$, $[\cdot]$ — обозначение целой части, $f_{E_n}(x)=f(a_1+f(a_2+\cdots+f(a_n+x)))$, а D — постоянная, не зависящая ни от E_n, ни от n.

Пусть M — множество точек интервала $(0,1)$, в которых определены все степени отображения T.

В [1] А. Реньи доказал: если выполнены условия a), c) или b), c), то на интервале $(0,1)$ существует такая измеримая функция p, что $1/D\leqslant p(x)\leqslant D$, $\int_0^1 p(x)\,dx=1$ и T есть эргодическаий эндоморфизм пространства M с мерой $p(X)=\int_X p(x)\,dx$.

Функция $p(x)$ единственна с точностью до множества меры 0.

Точки, в которых не определены все степени преобразования T, определим равенствами $T^k t=0$, $k=1,2,3,\dots$. Множество таких точек счетно, поэтому в метрических вопросах различием между M и интервалом $(0,1)$ можно пренебречь, что мы и будем делать.

Рассмотрим последовательность вещественнозначных заданных на интервале $(0,1)$ и измеримых по мере Лебега функций $g(T^k t)$, $k=0,1,2,\dots$.

Допустим, что выполнены следующие условия.

1) $\int_0^1 g(t)\,d\mu(t)=0$, $|g(t)|\leqslant C$, где C — постоянная.

2) Существуют такие постоянные $B>0$ и $\beta>0$, что

$$\biggl(\int_0^1 |g(t+h)-g(t)|^2\,d\mu(t|\biggr)^{1/2} \leqslant B|h|^{\beta}.$$

3) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^{-1}(\sum_{k=0}^{n-1} g(T^k t))^2\,d\mu(t)=\sigma^2>0$.

В перечисленных условиях верна следующая предельная теорема.

Теорема. *Равномерно относительно x, при $n\to\infty$*

$$\mu\biggl\{t:\ 0<t<1,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} g(T^k t)<x\biggr\}=\Phi(x)+O\biggl(\frac{1}{n^{1/2-\varepsilon}}\biggr),$$

где ε — скоь угодно малое положительное число.

При доказательстве теоремы использовался метод последовательныв приближений из [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Renyi A.* Representations for real numbers and their ergodic properties. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1957, v. 8, p. 477–493.
2. *Дубровин В. Т., Москвин Д. А.* Центральная предельная теорема для сумм функций от последовательностей с перемешиванием. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, в. 3, с. 553–564.