

В. И. Афанасьев (Москва, МИРАН). **Центральная предельная теорема для веса суперпозиции случайных отображений.**

Рассмотрим конечное множество A , состоящее из N элементов. Пусть Φ_A — множество всех отображений множества A в себя, а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ — выборка с возвращением из множества Φ_A . Рассмотрим суперпозицию этих отображений $\varphi^{(k)}(\cdot) = \varphi_k(\varphi_{k-1}(\dots \varphi_2(\varphi_1(\cdot)) \dots))$, $k \in \mathbf{N}$. Под $\varphi^{(0)}$ будем понимать тождественное отображение.

Весом $w(\varphi)$ отображения φ назовем мощность образа множества A при этом отображении. Введем последовательность случайных величин $w(\varphi^{(k)})$, $k \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Ясно, что эта последовательность является марковской цепью, стартовой из точки N . Рассмотрим более общую ситуацию, когда указанная цепь стартует из точки n , $n \leq N$. Нас интересуют асимптотические свойства этой марковской цепи в зависимости от параметров n , N .

Указанная задача может быть переформулирована в терминах теории случайных размещений. Пусть имеется N ящиков и n дробин. Дробинки равновероятным образом размещаются по этим ящикам, причем дробинки, попавшие в один ящик, «склеиваются». В результате получится $\eta(1)$ дробин, которые, в свою очередь, равновероятным образом размещаются по N ящикам, причем дробинки, попавшие в один ящик, «склеиваются». В результате получится $\eta(2)$ дробин и т. д. Ясно, что описанная ранее марковская цепь и случайная последовательность $\{\eta(k)\}$ одинаково распределены.

Будем рассматривать три области изменения параметров n , N ($n, N \rightarrow \infty$): *левая область*: $n^2/(2N) \rightarrow \lambda$, $\lambda \in (0, +\infty)$; *почти левая область*: $n^{2-\delta}/(2N) \rightarrow \lambda$, $\lambda \in (0, +\infty)$, $\delta \in (0, 1)$; *крайне левая область*: $n^{2+\delta}/(2N) \rightarrow \lambda$, $\lambda, \delta \in (0, +\infty)$.

Сформулируем основной результат для последовательности $\{\eta_k\}$.

Теорема. В левой области при любых $b \in (0, +\infty)$, $z \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta(bn) - n/(1 + \lambda b)}{\sqrt{n\lambda b(1 + \lambda b + \lambda^2 b^2/3)}} (1 + \lambda b)^2 \leq z \right\} \rightarrow \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Аналогичные результаты справедливы для почти левой и крайне левой областей (вместо выражения $\eta(bn)$ под знаком вероятности следует писать $\eta(bn^{1-\delta})$ и $\eta(bn^{1+\delta})$, соответственно).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05–01–00035) и гранта НШ–4129.2006.1.