

**Г. М. Кошкин, В. С. Лаходынов** (Томск, ОПИ ТНЦ СО РАН, ТГУ). Полурекуррентное непараметрическое прогнозирование в моделях нелинейных авторегрессий.

Пусть случайная последовательность  $\{X_t, t = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$  генерируется нелинейной авторегрессией порядка  $p$

$$X_t = f(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) + \varepsilon_t, \quad (1)$$

где  $\{\varepsilon_t\}$  — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и ограниченной дисперсией,  $f$  — такая неизвестная функция, что для любых  $x, y \in \mathbf{R}^p$

$$|f(y+x) - f(y)| \leq a_1|x_1| + \dots + a_p|x_p|, \quad a_1 + \dots + a_p < 1, \quad f(0) = 0. \quad (2)$$

Условие (2) обеспечивает стационарность процесса (1) (см. [1]).

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_{n+p}$  — выборка, генерируемая процессом (1). Теперь функцию  $f(x)$  в (1) можно оценить полурекуррентной статистикой [2]:

$$f_{n,p}(x) = \sum_{t=p+1}^{n+p} \frac{X_t}{h_t} K\left(\frac{x - Y_{t-1}}{h_t}\right) / \sum_{t=p+1}^{n+p} \frac{1}{h_t} K\left(\frac{x - Y_{t-1}}{h_t}\right), \quad (3)$$

где  $Y_{t-1} = (X_{t-p}, \dots, X_{t-1})$ ,  $K(u)$  —  $p$ -мерное ядро (обычно выбирают  $K(u)$  со свойствами плотности распределения), последовательность чисел  $h_n \downarrow 0$ .

В работе [1] также показано, что если  $\varphi$  — плотность распределения случайной величины  $\varepsilon_t$ , которая удовлетворяет условию Лифшица  $\int |\varphi(x+\Delta) - \varphi(x)| dx \leq C\Delta$ ,  $\Delta > 0$ ,  $C < \infty$ , то процесс нелинейной авторегрессии  $X_t$  будет процессом сильного перемешивания с экспоненциально убывающим коэффициентом сильного перемешивания  $\alpha(\tau) \leq C(\mathbf{a})e^{-\delta(\mathbf{a})\tau}$ ,  $\tau > 0$ ,  $C(\mathbf{a}) < \infty$ ,  $\delta(\mathbf{a}) > 0$ , где  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ , числа  $a_i$  определены в (2). Это позволяет воспользоваться результатами работы [3] и доказать сходимость в среднеквадратическом оценки  $f_{n,p}(x)$  к  $f(x)$ , а также найти главную часть асимптотической СКО  $f_{n,p}(x)$ .

Полурекуррентные непараметрические алгоритмы типа (3) первых трех порядков применялись при обработке 100 наблюдений изменения цены пая открытого паевого инвестиционного фонда «Альфа-Капитал Акции» с 15 декабря 2006 г. по 17 мая 2007 г. В качестве ядра использовалась плотность распределения нормальной случайной величины с нулевым вектором средних и единичной дисперсионной матрицей. Была выбрана следующая стратегия инвестирования: 1) по первым 20-ти наблюдениям строится оценка авторегрессии  $f_{20-p,p}(x)$  по формуле (3); 2) строится прогноз на 21-е значение цены пая  $\hat{X}_{21} = f_{20-p,p}(X_{21-p}, \dots, X_{20})$ ; 3) если по результатам прогноза цена пая на следующий день увеличивается, то пай покупаются, если цена уменьшается, то все пай погашаются; 4) после этого строится оценка авторегрессии  $f_{21-p,p}(x)$  по 21-му наблюдению; 5) процедура повторяется до тех пор, пока не будет построен прогноз на 17 мая.

Оказалось, что доходность за рассматриваемый период времени при выборе модели авторегрессии 1-го порядка составила 12,7%, 2-го порядка — 1,3%, 3-го порядка — 6,4%. Цена пая за весь период времени увеличилась на 8,3%, что на 50% меньше, чем доходность, полученная с использованием оценки авторегрессии 1-го порядка.

Можно считать, что в этом случае изменение цены пая более адекватно описывается процессом авторегрессии 1-го порядка, чем процессами авторегрессии 2-го и 3-го порядков.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балтрунас Й. Й., Рудзкене В. Ю. Регулярность процесса нелинейной авторегрессии. — Труды АН ЛитССР. Сер. Б, 1986, т. 2 (153), с. 118–122.
2. Györfi L., Kohler M., Walk H. Weak and strong universal consistency of semi-recursive kernel and partitioning regression estimates. — Statist. Decisions, 1998, v. 16, p. 1–18.
3. Кошкин Г. М., Пивен И. Г. Рекуррентное непараметрическое оценивание функционалов от условных распределений последовательностей сильного перемешивания. — В сб.: Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. — Минск: БГУ, 2005, с. 144–153.