

Т.А.Белкина, М.В.Самханова (Москва, ЦЭМИ РАН, МИЭМ).
О стохастическом условии отсутствия пирамиды в динамической модели потребления со случайным доходом.

Рассматривается динамическая модель оптимального управления потреблением для экономического агента, имеющего неинвестиционный случайный доход и возможность заимствования денежных средств по текущей процентной ставке. Данная модель является одним из стохастических аналогов децентрализованной модели Рамсея в случае дискретного времени (см. [1, 2]).

Пусть динамика капитала (денежного богатства) A_t , $t = 0, 1, \dots$, потребителя описывается соотношением

$$A_{t+1} = (1 + r)(A_t + Y_t - C_t), \quad (1)$$

где r — процентная ставка, Y_t ($t = 0, 1, \dots$) — случайный процесс, заданный на некотором стохастическом базисе $(\Omega, F, (F^t)_{t=0}^\infty, P)$ и описывающий случайный доход потребителя; C_t ($t = 0, 1, \dots$) — процесс потребления, рассматриваемый в качестве неупреждающего управления. Относительно процессов $\{Y_t\}_{t=0}^\infty$ и $\{C_t\}_{t=0}^\infty$ предполагается согласованность с фильтрацией $(F^t)_{t=0}^\infty$. Начальное значение богатства A_0 задано. Условие неотрицательности A_t не накладывается (что означает возможность заимствований).

При данных предположениях исследуется задача максимизации целевого функционала

$$E \sum_{t=0}^{\infty} (1 + \theta)^{-t} u(C_t), \quad (2)$$

где $u(C_t)$ — функция полезности потребителя, $\theta > 0$ — субъективная ставка дисконтирования. При этом вводится дополнительное ограничение, соответствующее краевому условию на бесконечности для задачи оптимизации и состоящее в условии возврата долга в течение бесконечного интервала времени с вероятностью единица:

$$\mathbf{P} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{(1 + r)^t} \geq 0 \right\} = 1. \quad (3)$$

Это условие гарантирует отсутствие так называемой пирамиды долга и является стохастическим аналогом соответствующего условия в децентрализованной модели Рамсея (см. [1], глава 2, условие «no-Ponzi-Game»).

Для случая квадратичной вогнутой функции полезности в предположении $\theta = r$ получен вид оптимального управления, относительно которого утверждается мартингалность процесса потребления

$$C_t = \left(\frac{r}{1 + r} \right) \left\{ Y_t + A_t + E_t \left[\sum_{i=t+1}^{\infty} (1 + r)^{t-i} Y_i \right] \right\}$$

при выполнении более сильного, чем (3), ограничения

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{(1 + r)^t} = 0 \right\} = 1, \quad (4)$$

которое исключает не только слишком быстрый рост долга, но и слишком быстрый рост сбережений. Таким образом, в указанном случае устанавливается, что оптимальное управление в каждый момент времени зависит от текущего богатства и ожидаемых значений случайного дохода в будущем. Для различных видов процессов $\{Y_t\}_{t=0}^\infty$, имеющих в некотором смысле не слишком быстрый рост, доказано выполнение условия (4), в частности, это верно (при нестрогих ограничениях) для случаев, когда $\{Y_t\}_{t=0}^\infty$ является мартингалом и субмартингалом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blanchard O., Fisher R.* Lectures in Macroeconomics. The MIT Press, 1989.
2. *Turnovsky S.* Methods of Macroeconomic Dynamics. The MIT Press, 1995.
3. *Белкина Т. А., Самханова М. В.* Исследование динамической модели оптимизации потребления при случайном доходе. — В сб.: Анализ и моделирование экономических процессов. М.: ЦЭМИ РАН, 2006, в. 3, с. 119–134.