

В. Н. Думачев, С. Б. Колесников (Воронеж, ВИ МВД России).
Коды над алгеброй Клиффорда.

Рассмотрим построение теории кодирования в градуированной алгебре Клиффорда $\Lambda(N^n) = \Lambda(n) = \Lambda^0(n) \otimes \Lambda^0(n) \otimes \cdots \otimes \Lambda^n(n)$ над полем Галуа $\text{GF}(2)$. Используя операцию $\oplus$ умножения по модулю 2 в качестве оператора композиции алгебры Клиффорда, получим $a \oplus b = (a \cdot b) + a \wedge b$. Здесь $(a \cdot b)$ — внутреннее, $a \wedge b$ — внешнее произведение элементов $a, b \in \Lambda(n)$ со свойствами базисных 1-форм $\omega^1 = e \in \Lambda^1(n)$:

$$e^i \oplus e^k = \begin{cases} (e \cdot e) \in \Lambda^0, & \forall i = k, \\ (e \wedge e) \in \Lambda^2, & \forall i \neq k. \end{cases}$$

Для произвольных элементов $\omega^k = (e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^k) \in \Lambda^k(n)$ получим $\omega^i \oplus \omega^k = \sum_{m=0}^n A_m^{ik} \omega^m$.

Очевидно, что вес кодового слова $A(\omega^k)$ определяет порядок уровня алгебры $\Lambda(n)$ соответствующих k -форм. Другими словами, весовой спектр алгебры $A(\omega^k) = C_n^k$ — это количество базисных k -форм на соответствующем уровне. Результатом Клиффордова призведения двух форм ω^i и ω^k может быть форма $\omega^m \in \Lambda^m(n)$, где $m = (0 \leq |i - k|, |i - k| + 1, \dots, i + k - 1, i + k \leq n)$. Обозначим A_m^{ik} спектр произведения, т. е. количество m -форм Клиффордова произведения $\omega^i \oplus \omega^k$. Приведем для примера несколько значений.

$$A_m^{0k} = \begin{pmatrix} C_n^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_n^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C_n^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^n \end{pmatrix},$$

$$A_m^{1k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 \cdot C_n^1 & 0 & (n-1) \cdot C_n^{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot C_n^1 & 0 & (n-2) \cdot C_n^{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot C_n^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \cdot C_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-2) \cdot C_n^{n-2} & 0 & 1 \cdot C_n^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-1) \cdot C_n^{n-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эффект возникновения единичной ошибки в форме $\omega^4 \in \Lambda^4(7)$ кода Хемминга [7, 3] алгебраически записывается как $\omega^1 \oplus \omega^4 = 4\omega^3 + 3\omega^5$, т. е. линейно выражается через структурные константы $A_m^{ik} = (A_3^{14}, A_5^{14}) = (4, 3)$ алгебры Клиффорда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ногин Д. Ю. Спектр кодов, ассоциированных с многообразием Грассмана $G(3, 6)$. — Проблемы передачи информации, 1997, т 33, № 2, с. 26–36.