Е. В. К у т ы р е в а (Москва, ТВП)**. Об упорядочении значений некоторых линейных псевдобулевых форм.**

В процессе решения различных математических проблем часто возникает задача упорядочения объектов разнообразной природы (см., например, [1]). В частности, в некоторых задачах статистики при построении статистических критериев и доверительных интервалов требуется упорядочить значения вероятностей, которые выражаются линейными псевдобулевыми формами. Задача упорядочения вероятностей того, что результаты n независимых испытаний Бернулли с вероятностями успеха $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$, $0 \leqslant p_{i_1} < 1/2$, $j = 1, \ldots, n$, описываются вектором $\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_n}$, $\varepsilon_{i_j} \in \{0, 1\}$, $j = 1, \ldots, n$, где значение вектора $(i_1, \ldots, i_n)$ пробегает некоторое множество M, рассматривалась многими авторами. В работе [2] множество M состоит из единственного вектора $(1, 2, \ldots, n)$. В работе [3] множество M содержит l векторов $M = \{(in+1, \ldots, (i+1)n)\}_{i=0}^{l-1}$.

В работе, представленной данным сообщением, упорядочиваются вероятности того, что результаты n независимых испытаний Бернулли с вероятностями успеха $p_{in+1}, \ldots, p_{in+n/2}, p_{jn+1}, \ldots, p_{jn+n/2}$, описываются вектором $\overline{\varepsilon}(i,j) = \varepsilon_{in+1}, \ldots, \varepsilon_{in+n/2}, \varepsilon_{jn+1}, \ldots, \varepsilon_{jn+n/2}$, $i = 0, 1, \ldots, 2l-2$, $j = i+1, i+2, \ldots, 2l-1$. Таким образом, $M = \{(in+1, \ldots, in+n/2, jn+1, \ldots, jn+n/2)\}$, $i = 0, 1, \ldots, 2l-2$, $j = i+1, i+2, \ldots, 2l-1$, мощность множества M равна $\binom{2l}{2}$. Пусть $P_{ij}(s_1, s_2)$ — вероятность того, что среди первых $n/2$ бит вектора $\overline{\varepsilon}(i,j)$ содержится ровно s_1 единиц, а среди последних $n/2$ бит — ровно s_2 единиц. Тогда логарифм этой вероятности представляет собой следующую псевдобулеву линейную форму от координат вектора $\overline{\varepsilon}(i,j)$:

$$\ln P_{ij}(s_1, s_2) = s_1 \ln p_i + \left(\frac{n}{2} - s_1\right) \ln(1 - p_i) + s_2 \ln p_j + \left(\frac{n}{2} - s_2\right) \ln(1 - p_j).$$

Верны следующие утверждения.

Лемма 1. *Зафиксируем произвольную пару* $\{i, j\}$, $i \in \{0, 1, \ldots, 2l-2\}$, $j \in \{i+1, i+2, \ldots, 2l-1\}$. *Рассмотрим все такие пары* $(s_1^{(k)}, s_2^{(k)})$, $k = 1, 2, \ldots, t$, *что* $(s_1^{(k)} + s_2^{(k)}) = s$ *для некоторого натурального числа* s. *Здесь* $t = s+1$, *если* $s \leqslant n/2$, *и* $t = n-s+1$, *если* $s > n/2$. *Тогда невозрастающий ряд вероятностей* $P_{ij}(s_1^{(k)}, s_2^{(k)})$ *строится в порядке возрастания величины* $s_1^{(k)}$.

Лемма 2. *Пусть пара* $\{i, j\}$ *удовлетворяет следующему условию*:

$$\left(\frac{p_i}{1 - p_i}\right)^{\min\{s, n/2\} - \max\{s+1-n/2, 0\}} > \left(\frac{p_j}{1 - p_j}\right)^{\min\{s+1, n/2\} - \max\{s-n/2, 0\}}.$$

Тогда построение невозрастающего ряда вероятностей $P_{ij}(s_1, s_2)$ *производится в соответствии с возрастанием величины* $s = (s_1 + s_2)$. *Для тех пар* (s_1, s_2), *у которых величина* s *одинакова, упорядочение производится в соответствии с утверждением леммы* 1.

Утверждение. *Невозрастающий ряд вероятностей* $P_{ij}(k_1, k_2)$, $k_r = 0, 1, \ldots, n/2$, $r = 1, 2$, $i = 0, 1, \ldots, 2l-2$, $j = i+1, i+2, \ldots, 2l-1$, *строится в соответствии с упорядочением по возрастанию величины* $d_i k_1 + d_j k_2 + n(c_i + c_j)/2$, *где действительные числа* $d_1, \ldots, d_{2M}, c_1, \ldots, c_{2M}$ *удовлетворяют условиям*

$$\frac{p_i}{1 - p_i} = \left(\frac{p_1}{1 - p_1}\right)^{d_i}, \quad (1 - p_i) = \left(\frac{p_1}{1 - p_1}\right)^{c_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2M,$$

$$1 = d_1 > d_2 > \cdots > d_{2M}, \quad c_1 < c_2 < \cdots < c_{2M}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. М., СПб., Киев: Вильямс, 2003.
2. *Зубков А. М.*, *Соколов Д. В.* Алгоритмы частичной сортировки множеств сумм. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 1, с. 318–319.
3. *Балакин Г. В.* Алгоритм нахождения множества наименьшей мощности, содержащего истинное решение с заданной вероятностью. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 7. М.: Физматлит, 2003, с. 7–21.