

А. В. Шаповалов (Москва, ТВП). **Классификация пороговых функций совместности случайных систем псевдобулевых уравнений.**

Пусть $\Phi_i = \{f_{i,1}, f_{i,2}, \dots, f_{i,m_i}\}$ — упорядоченное множество функций, принимающих значения в поле действительных чисел и существенно зависящих ровно от i булевых переменных (т. е. псевдобулевых функций), $m_i = |\Phi_i|$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Случайная система псевдобулевых уравнений S относительно n неизвестных состоит из $M = M(n)$ уравнений, которые выбираются последовательно, случайно и независимо, вероятность появления уравнения вида

$$f_{i,j}(x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_i}) = a \quad (1)$$

равна $c_{i,j,a}$ для каждого набора (i, j, a) , где $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, a принадлежит области значений функции $f_{i,j}$, сумма $c_{i,j,a}$ по указанным наборам (i, j, a) равна 1, и выполнено условие **А**: найдутся хотя бы два таких набора (i, j, a) , (i, j, b) , что $a \neq b$, $c_{i,j,a}c_{i,j,b} > 0$. Выбор упорядоченного множества неизвестных $\{x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_i}\}$ для каждого уравнения с функцией из Φ_i осуществляется независимо, случайно и равновероятно по схеме без возвращения из всех $n(n-1) \cdots (n-i+1)$ возможных упорядоченных наборов неизвестных по i штук.

Вероятность совместности $\mathbf{P}_c(S)$ случайной системы уравнений S равна сумме вероятностей совместных реализаций S . Если существует такая функция $Q(n)$, монотонно возрастающая при $n \rightarrow \infty$, что $\mathbf{P}_c(S)$ стремится к единице (нулю) при $M(n)/Q(n) \rightarrow 0$ ($M(n)/Q(n) \rightarrow \infty$), то она называется *пороговой функцией совместности случайной системы уравнений S* . Обозначим $c^{(0)} = \sum_{(i,j,a)} t_{i,j,a}^{(0)} c_{i,j,a}$, $c^{(1)} = \sum_{(i,j,a)} t_{i,j,a}^{(1)} c_{i,j,a}$, где $t_{i,j,a}^{(0)}$ и $t_{i,j,a}^{(1)}$ — числа однозначно определяющиеся из уравнения (1) переменных, равных 0 и 1.

Теорема. Случайная система уравнений S имеет пороговую функцию совместности, которая при $c^{(0)} + c^{(1)} = 0$ равна n , при $c^{(0)}c^{(1)} > 0$ — $\sqrt{n}$, в остальных случаях — $n^{1-1/r}$, где $r \in \{3, 4, \dots, m+1\}$.

В [1], [2] для близких к S случайных систем уравнений показано существование пороговых функций совместности вида $n^{1-1/r}$, где $r \in \{2, 3, \dots, m+1\}$. Завершение классификации пороговой функцией вида n стало возможным благодаря введению условия **А**. Без условия **А** случайная система уравнений S настолько широка, что включает в себя случайные заведомо совместные системы псевдобулевых уравнений, которые не имеют пороговых функций совместности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шаповалов А. В. Вероятность совместности случайных систем булевых уравнений. — Дискретн. матем., 1995, т. 7, в. 3, с. 146–159.
2. Шаповалов А. В. Пороговые функции совместности случайных систем уравнений. — В сб.: Труды по дискретной математике. М.: Гелиос АРВ, 2006, т. 9, с. 288–309.