Н. В. К о н о н о в а (Ставрополь, СИЭУ ФПГТУ). **Развитие фрактальных множеств.**

Фрактальные объекты, согласно своему начальному определению, обладают размерностью, строго превышающей топологическую размерность элементов, из которых они построены, причем эта размерность является дробной (под размерностью понимается размерность Хаусдорфа–Безиковича, введенная в 1919 г. Ф. Хаусдорфом, и развитая впоследствии А. С. Безиковичем). Основой новой геометрии является идея самоподобия [1]. Она выражает тот факт, что иерархический принцип организации фрактальных структур не претерпевает значительных изменений при рассмотрении их с различным увеличением. В результате эти структуры на малых масштабах выглядят в среднем так же, как и на больших. Здесь следует провести разницу между геометрией Евклида, имеющей дело исключительно с гладкими кривыми, и бесконечно изрезанными самоподобными фрактальными кривыми. Элементы кривых у Евклида всегда самоподобны, но тривиальным образом: все кривые являются локально прямыми, а прямая всегда самоподобна. Фрактальная же кривая в идеале, на любых, даже самых маленьких масштабах, не сводится к прямой и является в общем случае геометрически нерегулярной, хаотичной [2].

Фракталами являются, например, странные аттракторы, которые лежат в основе исследования динамических систем с хаотическим поведением. Вообще говоря, существует классификация фрактальных объектов [3]. Среди них можно выделить множество Мандельброта (относят к алгебраическим фракталам) и кривую Коха (относят к геометрическим фракталам).

Работы, связанные с исследованием фрактальных объектов, долгое время считались занимательными, но не имеющими значительных приложений. В настоящее время о перспективности и значимости исследований, связанных с фрактальными множествами, можно судить по регулярно проводимым конференциям и периодическим изданиям, целиком посвященным соответствующей тематике. Это позволяет говорить о сформировавшемся круге прикладных физических модельных задач на основе фрактальных множеств [4]. Среди них выделяются задачи и модели, где фрактальные множества представлены как самоподобные (фрактальные или масштабно-инвариантные) графы большой размерности, т.е. с большим количеством вершин. К ним относятся, например, задачи о броуновском движении (случайном блуждании), диффузии и просачиваемости. Кроме того, самоподобные графы нередко выступают в качестве моделей структур сложных многоэлементных систем, таких как коммуникационные сети, структура которых претерпевает определенные изменения. Процесс изменения связей между элементами системы, изменения количества ее элементов и другие структурные преобразования в системе являются областью интересов структурной динамики. В общем случае можно говорить о различных изменениях структуры системы — о различных сценариях структурной динамики. Особо стоит выделить рост структуры, т.е. появление новых элементов и связей в системе. Такой сценарий присущ многим сетям связи, среди них — информационные, электроэнергетические, интернет, коммуникационные системы и т. д. В случае, когда структура системы «растет» одинаково и одновременно во всех доступных направлениях, принято говорить, что система имеет фрактальный рост. Фрактальный рост структуры системы моделируется фрактальным графом.

Распространение идеи структурной динамики и фрактального роста потребовало решения значительного количества практических оптимизационных задач со многими критериями в системах с изменяющейся структурой. Некоторые из них, такие как многокритериальная задача покрытия предфрактального графа простыми цепями, многокритериальная задача покрытия предфрактального графа звездами ранговых типов, многокритериальная задача о назначениях на предфрактальных графах, многокритериальная задача Эйлера на предфрактальных графах, удалось успешно решить. Также представляет интерес следующая постановка многокритериальной задачи вершинной раскраски предфрактального графа.

Рассмотрим вершинно взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, у которой мощность множества вершин $|W| = n$, а мощность множества ребер $|Q| = q$. Обозначим x правильную раскраску (разбиение) множества вершин V_L предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$. Согласно такой раскраске множество вершин предфрактального графа делится на одноцветные подмножества $V_L = \{V_L^1, V_L^2, \ldots, V_L^i, \ldots, V_L^{k(x)}\}$.

Всевозможные правильные раскраски $\{x\}$ предфрактального графа G_L образуют множество допустимых решений $X = X(G_L) = \{x\}$ (МДР). Качество раскраски x на графе G_L задается векторно-целевой функцией $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x), F_5(x))$, $F_1(x) = k(x) \to \min$, где $k(x)$ — число цветов в раскраске x; $F_2(x) = \sum_{v \in V_L^i} \deg v \to \min$, где $i = 1, 2, \ldots, k(x)$; $F_3(x) = \max_{v \in V_L^i} \deg v - \min_{v \in V_L^i} \deg v \to \min$, где $i = 1, 2, \ldots, k(x)$; $F_4(x) = \sum_{v \in V_L^i} w(v) \to \min$, где $i = 1, 2, \ldots, k(x)$; $F_5(x) = \max_{v \in V_L^i} w(v) - \min_{v \in V_L^i} w(v) \to \min$, где $i = 1, 2, \ldots, k(x)$. Все критерии F_j, $j = 1, 2, \ldots, 5$, векторно-целевой функции имеют конкретную содержательную интерпретацию.

Большой интерес вызывает задача четырех красок. За ее решение до сих пор берутся различные любители, которые приводят свое, очень простое «доказательство» проблемы. Действительно, если воспользоваться элементарными понятиями из теории графов, то формулировка проблемы четырех красок звучит просто.

Решение этой проблемы может иметь два направления:

1) для произвольного плоского графа строится алгоритм, дающий правильную раскраску вершин четырьмя красками;

2) доказывается существование такой раскраски для произвольного плоского графа. Очевидно, что из первого следует справедливость второго.

Если проследить всю историю решения этой проблемы, то можно убедиться, что почти все исследователи избрали второй путь, который и завершился в совместной работе Аппеля и Хейкена. Они пришли к успеху после семилетнего кропотливого труда, при этом огромную часть вычислений провели с помощью современных ЭВМ. Но их доказательство настолько сложно и объемно, что за пять лет, прошедших с тех пор, не появилось ни одного сообщения о том, что оно кем-то полностью проверено. Поэтому не прекращаются попытки решить проблему четырех красок с использованием других подходов так, чтобы проверка ее решения была общедоступна. В этом отношении примечательно сообщение о методе Коэна, использующего факты из теории стохастических матриц и линейной алгебры, позволяющего несколько упростить доказательство проблемы, данное Аппелем и Хейкеном. К сожалению, до сих пор упомянутый метод нигде не был опубликован. Кроме того, вполне справедливо считать проблему полностью закрытой, если будет построен эффективный алгоритм раскраски произвольного плоского графа.

Проведя исследование по выявлению различных свойств и характеристик фрактальных и предфрактальных графов, связанных с их вершинной раскраской, установлена связь между хроматическим числом фрактального (предфрактального) графа и хроматическим числом его затравки/затравок. Обоснована невозможность построения однозначно раскрашиваемого предфрактального графа. Определены множества и их мощности критических подграфов фрактальных и предфрактальных графов. Предложены алгоритмы, которые за полиномиальное время выделяют на предфрактальном графе оптимальное решение по различным критериям задачи вершинной раскраски предфрактального графа.

Исследуя гипотезу о четырех красках на классе планарных графов, можно показать, что фрактальный или предфрактальный граф, порожденный плоской 4-хроматической затравкой с сохранением смежности старых ребер, является планарным 4-хроматическим графом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: ИКИ, 2002.
2. *Ахромеева Т. С.*, *Курдюмов С. П.*, *Малинецкий Г. Г.*, *Самарский А. А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.
3. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991.
4. *Божокин С. В.*, *Паршин Д. А.* Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ «РХД», 2001.