

А. С. К а л и т в и н (Липецк, ЛГПУ). **О дискретном аналоге уравнения Романовского.**

В 1932 г. известный советский математик В. И. Романовский описал задачу теории марковских цепей, которая приводится к интегральному уравнению

$$x(t, s) = \int_a^b l(t, s, \tau) x(s, \tau) d\tau + f(t, s) \equiv (Lx)(t, s) + f(t, s). \quad (1)$$

Уравнение (1) с заданными непрерывными функциями $l(t, s, \tau)$ и $f(t, s)$ было исследовано им в пространстве непрерывных функций методом, аналогичным технике определителей Фредгольма [1]. При более общих предположениях уравнение (1) изучалось в монографии [2]. В заметке, представленной данным сообщением, предполагается, что $t, s \in [a, b]$,

$$l(t, s, \tau) \equiv l(t, \tau) \in L^2(D), \quad f(t, s) \in L^2(D), \quad D = [a, b] \times [a, b]. \quad (2)$$

Вместе с уравнением (1) (при условиях (2)) рассматривается уравнение

$$x(t, s) = \int_a^b \int_a^b l(t, \tau) l(s, \tau_1) x(\tau, \tau_1) d\tau d\tau_1 + g(t, s) \equiv (Kx)(t, s) + g(t, s), \quad (3)$$

где компактный интегральный оператор K является квадратом оператора L . Если оператор $I - K$ обратим в $L^2(D)$ (т. е. 1 не является собственным числом оператора K), то в силу теоремы об отображении спектра оператор $I - L$ обратим в $L^2(D)$, а уравнение (1) имеет единственное решение в $L^2(D)$.

Пусть $\{e_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ — ортонормированный базис в $L^2([a, b])$, состоящий из ограниченных функций. Тогда $\{e_i \otimes e_j \mid i, j = 1, 2, \dots\}$ — ортонормированный базис в $L^2(D)$.

Если теперь x_{ij} , l_{ij} и f_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots$) — коэффициенты Фурье функций $x(t, s)$, $l(t, \tau)$ и $f(t, s)$, то уравнение (1) приводится к матричному уравнению

$$X = AX' + F, \quad (4)$$

где матрицы $X = (x_{ij})_{i,j=1}^\infty$, $A = (l_{ij})_{i,j=1}^\infty$, $F = (f_{ij})_{i,j=1}^\infty$ принадлежат $l^2 \times l^2$, а X' — матрица, транспонированная к X , которое обратимо в $l^2 \times l^2$, если 1 не является собственным числом оператора K . Уравнение (4) получено из уравнения (1). Если же задано уравнение (4) с матрицами A и F из $l^2 \times l^2$, то для изучения его разрешимости в $l^2 \times l^2$ можно записать функции $l(t, \tau)$ и $f(t, s)$ с коэффициентами Фурье l_{ij} и f_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots$) относительно выбранного в $L^2(D)$ базиса $\{e_i \otimes e_j \mid i, j = 1, 2, \dots\}$. После этого применяются приведенные выше рассуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Romanovskij V.* Sur une classe d'équations integrales linéaires. — Acta Math., 1932, v. 59, p. 99–208.
2. *Калитвин А. С.* Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2007, 195 с.