Е. А. Д а н и л о в а (Москва, МГУ). **Оценка правомочности упрощения задачи Коши для уравнения** $z_{uv} = \varepsilon_1(u,v)z_u + \varepsilon_2(u,v)z_v + F(z)$.

В физике сверхпроводников [1] задача Коши

$$\begin{aligned} &z_{uv} = \varepsilon_1(u,v)z_u + \varepsilon_2(u,v)z_v + F(z), \\ &z(u,v)|_{u+v=u_0} = z^0(u), \quad (z_u(u,v) + z_v(u,v))|_{u+v=u_0} = z^1(u), \end{aligned} \tag{1}$$

заменяется более простой с теми же начальными условиями:

$$z_{uv} = F(z), \qquad z(u,v)|_{u+v=u_0} = z^0(u), \quad (z_u(u,v) + z_v(u,v))|_{u+v=u_0} = z^1(u). \tag{2}$$

Проализируем правомочность такой замены.

В [2] методом последовательных приближений (при ограниченных ε_1, ε_2, ε_{1_u}, ε_{2_v} и F') показано, что решения задач Коши (1) и (2) могут быть представлены, соответственно, $z(u,v) = \lim_{n\to\infty} z_n(u,v)$, $z^*(u,v) = \lim_{n\to\infty} z_n^*(u,v)$, где

$$\begin{aligned} z_n(u,v) = \frac{1}{2}\biggl(z^0(u) + z^0(u_0 - v) + \int_{u_0-v}^{u} z^1(\xi)\,d\xi\biggr) \\ + \iint\limits_{\Delta} (\varepsilon_1(\xi,\eta)(z_{n-1})_u(\xi,\eta) + \varepsilon_2(\xi,\eta)(z_{n-1})_v(\xi,\eta) + F(z_{n-1}(\xi,\eta)))\,d\xi\,d\eta, \\ z^*(u,v) = \frac{1}{2}\biggl(z^0(u) + z^0(u_0 - v) + \int_{u_0-v}^{u} z^1(\xi)\,d\xi\biggr) + \iint\limits_{\Delta} F(z_{n-1}^*(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta. \end{aligned}$$

Следовательно, разность решений этих двух задач Коши выражается равенством $z(u,v) - z^*(u,v) = \lim_{n\to\infty}[z_n(u,v) - z_n^*(u,v)]$. При этом допускает оценку модуль разности последовательных приближений, именно:

$$\begin{aligned} |z_n(u,v) - z_n^*(u,v)| \leqslant \max|z_{n-1}|\Bigl(2(\max|\varepsilon_1| + \max|\varepsilon_2|)(u+v-u_0) + \frac{1}{2}(\max|\varepsilon_{2_v}| \\ + \max|\varepsilon_{1_u}|)(u+v-u_0)^2\Bigr) + \frac{1}{2}\max|F'(\lambda)|\max|z_{n-1} - z_{n-1}^*|(u+v-u_0)^2. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получим

$$\begin{aligned} \max|z - z^*|\Bigl(1 - \frac{1}{2}\max|F'(\lambda)|(u+v-u_0)^2\Bigr) \leqslant \Bigl(2(\max|\varepsilon_1| + \max|\varepsilon_2|) \\ \times (u+v-u_0) + \frac{1}{2}(\max|\varepsilon_{2_v}| + \max|\varepsilon_{1_u}|)(u+v-u_0)^2\Bigr)\max|z|. \end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, разность решений двух задач Коши будет тем меньше, чем ближе точка (u,v) к прямой, на которой заданы начальные условия, а также чем меньше величин $\max|\varepsilon_1|$, $\max|\varepsilon_2|$, $\max|\varepsilon_{1_u}|$, $\max|\varepsilon_{2_v}|$, а неравенство (3) дает количественную оценку.

Результаты работы, представленной данным сообщением, могут быть применены в физике (см. [1], гл. 10, где $F(z) = \sin z$, а $F'(z) = \cos z$, поэтому $|F'(z)| \leqslant 1$, и взята математическая модель с постоянными ε_j). Используя (3), можно оценить границы для ε_j, которыми можно было бы пренебречь при построении решения задачи (1) с заданной точностью, когда стараются свести ее к задаче (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бароне А., Патерно Дж.* Эффект Джозефсона. М.: Мир, 1984.
2. *Данилова Е.* Применение метода последовательных приближений к решению задачи Коши для уравнения $\varphi_{tt} = u^2\varphi_{xx} + b(x,t)\varphi_t + f(\varphi)$. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 2, с. 305–306.