

В. М. Зотов, Т. В. Штельмах, Т. Н. Зотова (Волгоград, ВолГУ, ВолГМУ). Математическая модель процесса торможения автомобильного колеса: решение методом последовательных приближений (метод Пикара).

Математическая модель процесса торможения колеса с проскальзыванием, представленная системой уравнений (1), соответствует требованиям, предъявляемым методом Пикара к дифференциальным уравнениям:

$$I\dot{\omega} = -M_0 t^n + P_z R \varphi(S), \quad \dot{V} = -g \varphi(S), \quad \varphi = \frac{f_0 S}{aS^2 + bS + c}, \quad S = I - \frac{R\omega}{V}, \quad (1)$$

где P_z — сила давления на ось колеса; R — радиус, I — момент инерции, ω — угловая скорость, $\dot{\omega}$ — угловое ускорение колеса относительно его оси; V — линейная скорость, $\dot{V}$ — линейное ускорение оси колеса относительно дороги. Коэффициенты f_0 , a , b , c больше нуля и характеризуют сцепные свойства колеса с поверхностью дороги. Процесс торможения начинается в нулевой момент времени, причем $\omega(0) = \omega_0$, $V(0) = V_0 = R\omega_0$. Проведя два последовательных приближения решения системы (1), при $n > 0$ получим:

$$\begin{aligned} \omega_2(t) &= \omega_0 - \frac{M_0 t^{n+1}}{(n+1)I} + \frac{mgRf_0}{I} \Phi(t), \quad V_2(t) = V_0 - gf_0 \Phi(t), \quad \text{где} \\ \Phi(t) &= \int_0^t \varphi(t) dt = \int_0^t \frac{t^{n+1}}{a_1 t^{2(n+1)} + bt^{n+1} + c_1} dt, \\ a_1 &= \frac{aM_0}{(n+1)I\omega_0}, \quad c_1 = \frac{c(n+1)I\omega_0}{M_0}. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом условия $D = b^2 - 4a_1c_1 = b^2 - 4ac > 0$ получен явный вид функции $\Phi(t)$ для значений параметра $n = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $n = 2$. Дальнейшее приближение решений не имеет смысла, так как функция $\varphi(t)$ в (2) усложняется настолько, что вычислить ее интеграл аналитически невозможно. Сравнение численного решения дифференциальных уравнений (1) с их аналитическим решением (2) при движении колеса по поверхности «сухой асфальт» представлены на рис. 1–6 (где сплошная линия — численное решение (W_n, V_n) , штриховая линия — первое приближение (W_1) , пунктирная линия — второе приближение (W_2, V_2)).

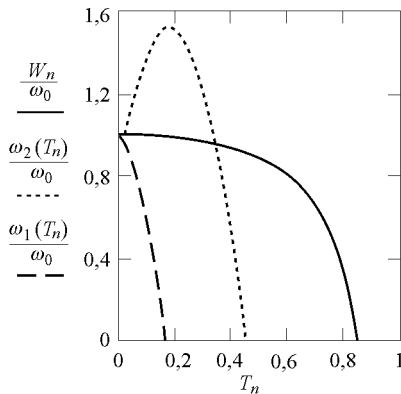


Рис. 1. График зависимости угловой скорости ω колеса от времени t для $n = 1/2$

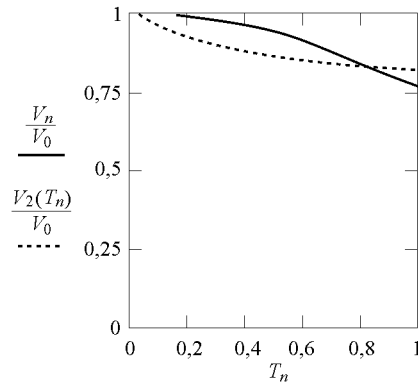


Рис. 2. График зависимости линейной скорости V колеса от времени t для $n = 1/2$

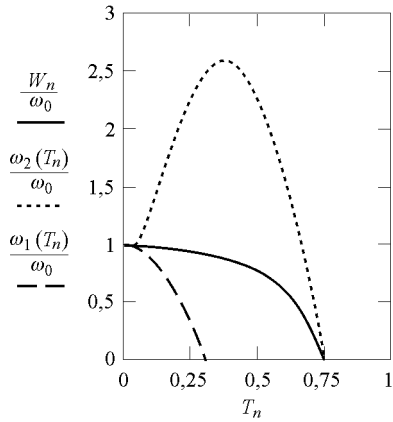


Рис. 3. График зависимости угловой скорости ω колеса от времени t для $n = 1$

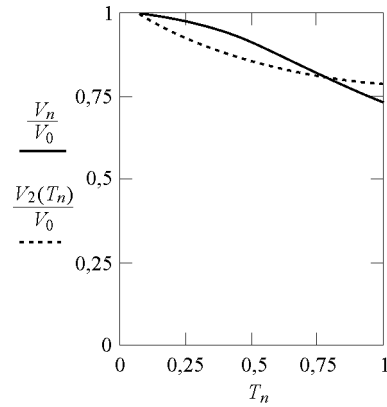


Рис. 4. График зависимости линейной скорости V колеса от времени t для $n = 1$

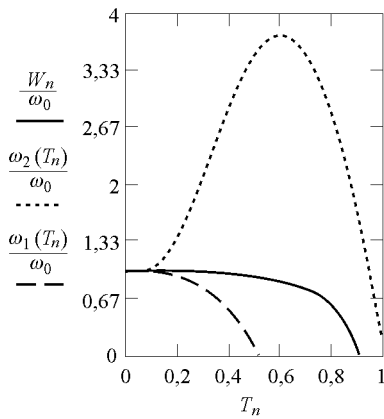


Рис. 5. График зависимости угловой скорости ω колеса от времени t для $n = 2$

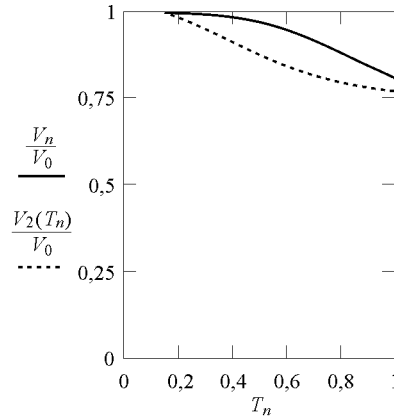


Рис. 6. График зависимости линейной скорости V колеса от времени t для $n = 2$

Из графиков можно сделать вывод о применимости метода Пикара для модели (1) в определении временного момента t_ω при $n = 1$ и в оценке значений функции $V(t)$ на том же временном промежутке при $n > 0$ и неприемлемости метода в оценке значений функции $\omega(t)$.