

С. Е. Холодовский (Чита, ЗабГПУ). **О решении краевых задач с обобщенными условиями сопряжения в кусочно неоднородных средах.**

В рамках теории гармонических функций построены решения краевых задач с обобщенными условиями сопряжения для дифференциальных уравнений с функциональными кусочно-непрерывными коэффициентами, что моделирует установившиеся динамические процессы в кусочно неоднородных средах с сильно проницаемой трещиной или слабопроницаемой завесой.

Рассмотрим на плоскости $R^2 = D_1(x < 0) \cup D_2(x > 0)$, $y \in R$, задачу

$$\partial_x(k_i \partial_x \varphi_i) + k_i \partial_y^2 \varphi_i = 0, \quad (x, y) \in D_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$x = 0: \quad \varphi_2 - \varphi_1 = A_1 v_1, \quad v_2 - v_1 = \frac{A_2}{k_1} \partial_x v_1, \quad (2)$$

где $k_i(x) > 0$ в $\overline{D}_i$, $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$, $v_i = k_i \partial_x \varphi_i$, $A_i \geq 0$ — постоянные, одна из которых равна нулю, функция φ_2 в D_2 имеет заданные особые точки. Для функций

$$k_i(x) = [p_i + (-1)^i q_i x]^2, \quad (3)$$

где $q_i \geq 0$, $p_i > 0$, представляя решение задачи (1)–(2) в виде $\varphi_i = p_i u_i [p_i + (-1)^i q_i x]^{-1}$, получим задачу

$$\Delta u_i = 0; \quad x = 0: \quad u_2 - u_1 = A_1 V_1, \quad V_2 - V_1 = A_2 \partial_x^2 u_1, \quad (4)$$

где $V_i = p_i [p_i \partial_x u_i - (-1)^i q_i u_i]$. Пусть гармоническая функция $f(x, y)$ имеет заданные особые точки при $x > 0$. Полагая, что функция $f(0, y)$ разлагается в интеграл Фурье: $f(0, y) = S[g] \equiv \int_0^\infty g d\lambda$, где $g = f_1 \sin \lambda y + f_2 \cos \lambda y$, представим функцию $f(x, y)$ при $x \leq 0$ в виде

$$f(x, y) = S[e^{\lambda x} g]. \quad (5)$$

Отсюда в случае завесы ($A_1 > 0$, $A_2 = 0$) функции u_i найдем в виде

$$u_1 = S[ae^{\lambda x} g], \quad u_2 = f(x, y) + S[be^{-\lambda x} g], \quad (6)$$

где

$$a = \frac{2p_2^2}{Q} \left(\frac{\gamma_1}{\lambda + \gamma_1} - \frac{\gamma_2}{\lambda + \gamma_2} \right), \quad b = 1 + \frac{2}{Q} \left[\frac{N(-\gamma_1)}{\lambda + \gamma_1} - \frac{N(-\gamma_2)}{\lambda + \gamma_2} \right],$$

$j = 1$, $N(\lambda) = p_1^2 r_2 \lambda + r_1 p_2 q_2 + p_1 q_1$, $\gamma_i = [p_1^2 r_2 + p_2^2 r_1 - (-1)^i Q](2A_j p_1^2 p_2^2)^{-1}$, $Q^2 = [A_j p_1 p_2 (p_1 q_2 - p_2 q_1) + p_1^2 - p_2^2]^2 + 4p_1^2 p_2^2$, $r_i = 1 + A_j q_i p_i$.

Разложения (6) отличаются от разложения заданной функции f (5) лишь множителями $(\lambda + \gamma_i)^{-1}$. Умножая разложение $f(x - z, y)$ (5) на $e^{-\gamma z} z^n (n!)^{-1}$ и интегрируя по $z \in (0, \infty)$, с учетом формулы 2.3.3.2 из [1], получим формулу

$$\frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\gamma z} z^n f(x - z, y) dz = S \left[\frac{e^{\lambda x} g}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} \right], \quad x < 0,$$

где $\gamma > 0$, $n = 0, 1, \dots$. Отсюда функции u_i (6) непосредственно выражаются через заданную функцию $f(x, y)$ в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= (-1)^j \frac{2p_2 p_i}{Q} \int_0^\infty f(x - z, y) \left(\gamma_2 e^{-\gamma_2 z} - \gamma_1 e^{-\gamma_1 z} \right) dz, \\ u_2 &= f(x, y) + f(-x, y) - \frac{2}{Q} \int_0^\infty f(-x - z, y) \left[N(-\gamma_2) e^{-\gamma_2 z} - N(-\gamma_1) e^{-\gamma_1 z} \right] dz, \end{aligned} \quad (7)$$

$i = 2$, $j = 1$. Аналогично строятся решения u_i в случае трещины ($A_2 > 0$, $A_1 = 0$).

Рассмотрим класс функций $k_i(x)$ вида

$$k_i(x) = [p_i + (-1)^i q_i x]^{-2}. \quad (8)$$

Представляя решение задачи (1)–(2) в виде $\varphi_i = q_i u_i - [q_i x + (-1)^i p_i] \partial_x u_i$, для функций u_i получим задачу

$$\Delta u_i = 0; \quad x = 0 : \quad U_2 - U_1 = -\frac{A_1}{p_1} \partial_x^2 u_1, \quad \partial_x^2 \left(\frac{u_2}{p_2} + \frac{u_1}{p_1} \right) = -A_2 \partial_x^2 U_1, \quad (9)$$

где $U_i = q_i u_i - (-1)^i p_i \partial_x u_i$. Отсюда функции u_i в случае трещины найдем в виде (7), где $i = 1, j = 2$. В случае завесы решение задачи (9) строится аналогично. Также аналогично строятся решения задач, когда в одной из зон D_i функция $k_i(x)$ имеет вид (3), а в другой (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981, 798 с.