

Н. Н. Шадрина (Чита, ЧитГУ). **О решении задачи Дирихле в неоднородной полуплоскости.**

Рассмотрим в полуплоскости $D(y < l) = D_1(y < 0) \cup D_2(0 < y < l)$ задачу Дирихле

$$k \partial_x^2 \varphi + \partial_y(k \partial_y \varphi) = 0, \quad \varphi_2|_{y=l} = f(x), \quad (1)$$

$$y = 0: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad k_1 \partial_y \varphi_1 = k_2 \partial_y \varphi_2, \quad (2)$$

где $k_1 = p^2$, $k_2(y) = (p + by)^2$, $\partial_y^n = \partial^n / \partial y^n$, k_i и φ_i — значения функций $k(y)$ и φ в D_i , постоянные $b \geq 0$, $p > 0$. В данном случае коэффициент $k(y)$ (1), характеризующий проницаемость области D , является непрерывной функцией, возрастающей в D_2 . Данная задача имеет интерес, например, в теории фильтрации, поскольку проницаемость реальных грунтов часто монотонно убывает с глубиной.

Для решения задачи (1)–(2) применим метод свертывания интегралов Фурье [1]. Представляя функции φ_i в виде

$$\varphi_1 = u_1, \quad \varphi_2 = \frac{pu_2}{p + by}, \quad (3)$$

для функций $u_i(x, y)$ получим задачу

$$\Delta u_i = 0, \quad u_2|_{y=l} = h(x), \quad (4)$$

$$y = 0: \quad u_1 = u_2, \quad p \partial_y u_1 = p \partial_y u_2 - bu_2, \quad (5)$$

где $h(x) = f(x)(p + bl)/p$. Наряду с задачей сопряжений (4)–(5) рассмотрим классическую задачу Дирихле (4) в полуплоскости D , решение которой $F(x, y)$ строится по формуле Пуассона (для кусочно-непрерывных граничных функций, составленных из многочленов, функция F строится в конечном виде). Предположим сначала, что граничная функция h разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами h_i . Тогда функция F представима в виде

$$F(x, y) = \int_0^\infty e^{\lambda(y-l)} g d\lambda, \quad y < l, \quad (6)$$

где $g = h_1 \sin \lambda x + h_2 \cos \lambda x$. Представляя решение задачи (4)–(5) также в виде интегралов Фурье, найдем

$$u_1 = \int_0^\infty a_1 e^{\lambda y} g d\lambda, \quad u_2 = F(x, y) + \int_0^\infty a_2 g \operatorname{sh} \lambda(y-l) d\lambda, \quad (7)$$

$$a_1 = \frac{p\lambda e^{-\lambda l}}{p(\lambda + \gamma)(1-q)}, \quad a_2 = \frac{b e^{-2\lambda l}}{p(\lambda + \gamma)(1-q)}, \quad (8)$$

где $q = \gamma e^{-2\lambda l}(\lambda + \gamma)^{-1}$, $\gamma = b(2p)^{-1} > 0$, причем $0 < q < 1$ при $0 < \lambda < \infty$. Умножая разложение $F(x, -y - z + l)$ при $y > 0$ (6) на $e^{-\gamma z} z^n (n!)^{-1}$ и интегрируя по $z \in (0, \infty)$, получим формулу

$$\frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\gamma z} z^n F(x, -y - z + l) dz = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda y} g}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} d\lambda, \quad y > 0,$$

где $n = 0, 1, \dots$. Отсюда, разлагая в равенствах (8) $(1-q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, функции u_i (7) непосредственно выразим через заданную функцию $F(x, y)$ в виде

$$u_i = F(x, y) + \sum_{n=0}^\infty \frac{\gamma^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-\gamma z} z^n [F(x, y - 2l(n+1) - z) - F(x, (-1)^{i+1} y - 2nl - z)] dz. \quad (9)$$

При этом решение исходной задачи строится по формулам (3), (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания интегралов Фурье в решении краевых задач с условиями сопряжения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, № 2, с. 366–367.