

Г. Ш. Ц и ц и а ш в и л и (Владивосток, ИПМ ДВО РАН). **Пакетный алгоритм определения длины кратчайшего пути на графе.**

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается задача определения минимальной длины пути между двумя вершинами графа [1]. Эта задача имеет многочисленные применения и, в частности, используется при вычислении асимптотики вероятности работы сети с ненадежными элементами [2]. В классической задаче о минимальной длине пути расчет ведется только для фиксированной пары узлов сети. В настоящей работе предполагается, что нужно рассчитать минимальные длины путей между любыми двумя узлами графа. Для решения этой задачи строится так называемый *пакетный алгоритм*, позволяющий за счет совмещения некоторых операций по вычислению минимальных длин путей между различными парами вершин существенно сократить число арифметических операций, приходящихся на отдельную пару узлов.

Пусть задан ориентированный граф с множеством вершин M , состоящим из m элементов, и множеством ребер N . Каждой паре (i, j) , $i, j \in M$, сопоставляется число $l(i, j)$, удовлетворяющее условиям:

$$0 \leq l(i, j) \leq \infty; \quad l(i, i) = 0, \quad i \in M; \quad l(i, j) = \infty, \quad (i, j) \notin N, \quad (1)$$

и характеризующее длину ребра (или какой-нибудь другой показатель, например, пропускную способность ребра). Обозначим $l_k(i, j)$ минимальную длину путей из вершины i в вершину j , содержащих k ребер, $l_1(i, j) = l(i, j)$. Положим $L_k = \|l_k(i, j)\|_{i, j \in M}$ и определим на множестве матриц размерности $m \times m$ бинарную операцию «*» условием: если $C = A * B$, то справедливы равенства

$$c(i, j) = \min_{k \in M} (a(i, k) + b(k, j)), \quad i, j \in M. \quad (2)$$

Так как допускается равенство $l(i, j) = \infty$, то для корректности формулы (2) следует формально доопределить $a + \infty = \infty$, $\min(a, \infty) = a$, $\max(a, \infty) = \infty$, $0 \leq a \leq \infty$. Тогда в силу формул (1)–(2) справедливо равенство $L_k * L_r = L_{k+r}$, $k > 0$, $r > 0$, причем для любых (i, j) , $i, j \in M$, последовательность $l_k(i, j)$, $k \geq 1$, монотонно не возрастает и, начиная с номера $k = m$, становится постоянной. Пусть $s = \min\{p: 2^p \geq m\}$, тогда матрица L_{2^s} состоит из минимальных длин путей между узлами исходного графа и с учетом рекуррентного соотношения $L_{2^{k+1}} = L_{2^k} * L_{2^k}$, $k \geq 1$, для ее вычисления требуется $2m^3 s \sim 2m^3 \log_2 m$, $m \rightarrow \infty$, арифметических операций. В пересчете на отдельную клетку этой матрицы получается порядка $2m \log_2 m$ арифметических операций. В данном рассмотрении можно вместо длины пути взять его псевдодлину, равную максимальной длине ребра пути. Тогда в формуле (2) следует заменить операцию «+» на «max».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов В. В., Воробьев Е. М., Шаталов В. Е. Теория графов. М.: Высшая школа, 1976.
2. Tsitsiashvili G. Sh. Asymptotic analysis of logical systems with unreliable Elements. — Reliability: Theory and Appl.s, 2007, v. 2, № 1, p. 34–37.