

Г. И. Белявский, М. А. Бутакова (Ростов-на-Дону, РГСУ, Р-ГУПС). **Знаковый анализ автомодельных процессов.**

Рассмотрим анализ автомодельного процесса Леви с трендом: $V_t = t^H \mathbf{E} V_1 + X_t$. В качестве оценки $\mathbf{E} V_1$ естественно взять выборочное среднее, либо другую статистику для математического ожидания. Рассмотрим дискретизацию процесса V с фиксированным шагом η ; не нарушая общности, будем считать, что $\eta = 1$. Рассмотрим последовательность приращений Δ , для которой справедлива формула: $\Delta_i = (i^h - (i-1)^H) \mathbf{E} V_1 + \Delta X_i$; ΔX_i независимы и одинаково распределены по симметричному устойчивому закону распределения, зависящему от параметра H . При больших значениях i с большой степенью точности $(i^H - (i-1)^H) \mathbf{E} V_1 = H i^{H-1} \mathbf{E} V_1$. При этом ошибка равна $O(i^{-2})$. Для исключения влияния параметра H в распределении ΔX_i применим знаковый анализ [1]. Для возможности применения знакового анализа функция распределения шума (в нашем случае ΔX_i) должна удовлетворять условиям: 1) $F(0) = 1/2$; 2) $F'(0) > 0$; 3) $F''(0)$ существует в окрестности 0 и $F''(0) = 0$. Поскольку распределение ΔX_i — симметричное устойчивое распределение, то условия 1)–3) для него выполнены.

В соответствии со знаковым анализом для оценки H требуется найти

$$\min_H \left(\sum_{i=1}^N \text{sign} \left(\Delta_i - \frac{H}{i^{1-H}} \mathbf{E} V_1 \right) \right)^2. \quad (1)$$

Так как $0 < H \leq 1$, то минимум в (1) может быть найден перебором.

Рассмотрим далее статистический анализ автомодельных процессов, не являющихся процессами Леви. Для оценки H обратимся к R/S -анализу. Положим

$$R_n = \max_{k \leq n} \left(X_k - \frac{k}{n} X_n \right) - \min_{k \leq n} \left(X_k - \frac{k}{n} X_n \right).$$

Пусть S_n^2 — выборочная дисперсия для $(\Delta_i)_1^n$. Статистика $Q_n = R_n/S_n$ называется R/S -статистикой. Установлено, что $Q_n \sim cn^H$ для больших n . Применение знакового анализа приводит к задаче:

$$\min_{H, \ln c} \left(\left(\sum_{k=n}^K \ln K \text{sign}(\ln Q_k - H \ln k - \ln c) \right)^2 + \left(\sum_{k=n}^K \text{sign}(\ln Q_k - H \ln k - \ln c) \right)^2 \right),$$

которая относится к трудным задачам. Поэтому далее рассматривается решение задачи об отыскании знаковых оценок для неизвестных параметров в координатной постановке.

Пусть известно $\ln c_t$. Для получения оценки H_t необходимо решить задачу:

$$\min_{H, \ln c} \left(\sum_{k=n}^K \text{sign}(\ln Q_k - H \ln k - \ln c_t) \right)^2.$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком минимума к виду:

$$\left(\sum_{k=n}^K \text{sign} \left(\frac{\ln Q_k - \ln c_t}{\ln k} - H \right) \right)^2,$$

и рассмотрим функцию

$$F(H) = \sum_{k=n}^K \text{sign} \left(\frac{\ln Q_k - \ln c_t}{\ln k} - H \right).$$

Функция $F(H)$ является кусочно-постоянной убывающей функцией. Она изменяется от $\sum_{k=n}^K \ln k$ до $-\sum_{k=n}^K \ln k$, совершая скачки, равные $2 \ln K$, и принимает постоянные значения на интервалах $(a_{(i)}, a_{(i+1)}]$, где $a_{(i)} = (\ln Q_{(i)} - \ln c_t) / \ln(i)$, $i = n, \dots, K-1$. Возможны два варианта: 1) существует такое i^* , что $F(H) = 0$, $H \in (a_{(i^*)}, a_{(i^*+1)}]$, тогда в качестве H_t можно взять любую точку из этого интервала; 2) существует i^* : $F(H) > 0$, $H \in (a_{(i^*)}, a_{(i^*+1)}]$, $F(H) < 0$, $H \in (a_{(i^*+1)}, a_{(i^*+2)}]$. Из этих двух интервалов выбираем тот, для которого $|F(H)|$ меньше, в качестве H_t выбираем любую точку из этого интервала. Для вычисления оценки $\ln c_{t+1}$ при фиксированном H_t необходимо решить задачу:

$$\min_{\ln c} \left(\sum_{k=n}^K \text{sign}(\ln Q_k - H_t \ln k - \ln c) \right)^2. \quad (2)$$

Решение задачи (2): $\ln c_{t+1} = \text{med}(\ln Q_k - H_t \ln k)_n^K$. Итерационные вычисления следует продолжать до тех пор, пока будут происходить существенные изменения.

Если известно, что X — фрактальное броуновское движение, то наряду с этим может быть использована и другая статистика.

Пусть шаг разбиения $\eta \neq 1$. Воспользуемся тем, что Δ_i — нормальная случайная величина с дисперсией $\mathbf{D} \Delta_i = \eta^{2H}$. Тогда математическое ожидание $\mathbf{E} |\Delta_i| = \sqrt{2/\pi} \eta^H$.

Применив далее знаковый анализ для оценки H , получим задачу:

$$\min_H \left(\sum_{i=1}^N \text{sign} \left(\ln |\Delta_i| - H \ln \eta - \ln \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right)^2, \quad (3)$$

которая существенно проще предыдущей. Решение задачи (3) выглядит следующим образом:

$$H = \frac{M + \ln(2/\pi)}{\ln \eta}, \quad \text{где } M = \text{med}(\ln |\Delta_i|)_1^N.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 07-08-00052.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тюрин Ю.Н., Симонова Г.И. Знаковый анализ линейных моделей. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 1994, т. 1, в. 2, с. 214–278.