В. Р. Чакрян (Сочи, РГСУ). **Генерация ковариационных матриц многомерных нормальных распределений.**

Задача генерации ковариационной матрицы, как и любого вероятностного объекта, требует определения вероятностной меры. Такой мерой для вновь генерируемой ковариационной матрицы может служить ковариационная матрица случайной выборки заданного размера p-мерного нормального распределения. В данном случае значительную роль играет распределение Уишарта [1]. Если ковариационная матрица $\Sigma = I$, то указанное распределение можно считать многомерным обобщением χ^2-распределения. Это распределение характеризует меру разброса выборки относительно генеральной совокупности (в многомерном случае) и, соответственно, отличие ковариационной матрицы отдельно взятой выборки от ковариационной матрицы, задаваемой в аналитическом виде. Другими словами, если имеется $X \in N_p(0,\Sigma)$, то для матрицы, составленной из n измерений p-мерных величин $C(n \times p)$ в связи с исследованиями Уишарта, оцениваемая ковариационная матрица должна быть пропорциональна $C^T C$. Тогда говорят, что матрица $M(p \times p) = C^T C = \sum_{i=1}^{n} X_i X_i^T$ имеет *распределение Уишарта*, обозначаемое $W_p(k,\Sigma,n)$, где k — число степеней свободы. Когда $p=1$, $W_1(k,\sigma^2)$ есть не что иное, как распределение $\sigma^2\chi^2(k)$. Вследствие того, что матрица M является симметричной, удобно рассматривать ее как нижнетреугольную. В связи с этим распределение Уишарта можно представлять в виде вектора $(m_{11},\ldots,m_{p1},m_{22},\ldots,m_{p2},\ldots,m_{pp})^T$. Для того чтобы сгенерировать случайную матрицу $B_1 \in W_p(\Sigma,n)$, предлагается следующий алгоритм. Данный алгоритм предназначен для генерации случайной ковариационной матрицы, соответствующей выборке p-мерных случайных величин размера n. Здесь следует заметить, что при генерации матрицы Уишарта используется разложение экспоненциального члена, а именно, преобразование Хельмерта [2], в силу которого генерируемая случайная величина X в приведенном далее алгоритме независима от остальных величин и нормально распределена с нулевым средним и единичной дисперсией и имеет плотность $p(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$, следовательно, распределение $\mathbf{Z}$ имеет дисперсию $\mathbf{D}\,\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \sigma_i^2$.

Алгоритм генерации ковариационной матрицы для выборки многомерного нормального распределения с ковариационной матрицей Σ.

1. По методу квадратного корня получаем такую матрицу A, что $\Sigma = A^T A$.

2. Генерируем нижнетреугольную матрицу $\mathbf{Z}$: 2.1) начало цикла для $i = 1,2,\ldots,j$; 2.2) начало цикла для $j = 2,3,\ldots,p$; 2.3) $z_{ij} = X_{N(0,1)}$, где $X_{N(0,1)}$ — стандартная нормальная случайная величина; 2.4) конец цикла для j,i.

3. Генерируем независимую $\chi^2(n-i)$-распределенную величину y_i: 3.1) начало цикла для $i = 1,2,\ldots,p$; 3.2) $y_i = X_{\chi^2(n-i)}$; 3.3) конец цикла.

4. Вычисляем элементы b_{ij} матрицы b: 4.1) $b_{11} = y_1$; 4.2) начало цикла для $j = 1,2,\ldots,p$; 4.2.1) $b_{1j} = z_{1j}\sqrt{y_1}$; 4.2.2) конец цикла; 4.3) начало цикла для $j = 2,3,\ldots,p$; 4.3.1) $b_{jj} = y_j + \sum_{m=1}^{j-1} z_{mj}^2$; 4.3.2) конец цикла; 4.4) начало цикла для $i < j = 2,3,\ldots,p$; 4.4.1) $b_{ij} = z_{ij}\sqrt{y_i} + \sum_{k=1}^{i-1} z_{ki} z_{kj}$; 4.4.2) конец цикла; 4.5) начало цикла для $i > j = 2,3,\ldots,p$; 4.5.1) $b_{ij} = b_{ji}$; 4.5.2) конец цикла.

5. Искомая матрица $V = n^{-1} A^T B A$.

Преимущество этого алгоритма состоит в том, что на каждом шаге вычислений не требуется формирование n p-мерных случайных величин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их приложения. М.: Наука, 1968, 548 с.
2. *Кендалл М.*, *Стьюарт А.* Теория распределений. М.: Наука, 1966, 588 с.