

А. В. М а с т и х и н (Москва, МГТУ). **Предельная теорема для финального распределения марковского процесса эпидемии Гани.**

На множестве состояний $\mathbf{N}^3 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0, 1, 2, \dots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) | \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}$. Пусть при $t \rightarrow 0+$ переходные вероятности имеют следующий вид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$):

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3 + 1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 t + o(t), \quad P_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = \lambda_2 \alpha_1 \alpha_3 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = \lambda_3 \alpha_1 t + o(t), \quad P_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = 1 - (\lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1 \alpha_3 + \lambda_3 \alpha_1)t + o(t).$$

Марковский процесс $\xi(t)$ определен в [1] как модель распространения инфекции в популяции с тремя типами особей (частиц) и двумя стадиями заболевания: $T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + T_3$; $T_1 + T_3 \rightarrow T_1$; $T_1 \rightarrow 0$. Частицы типа T_1 — зараженные особи (источники инфекции); частицы типа T_2 — здоровые особи (восприимчивые к инфекции, не имевшие контактов с зараженными); частицы типа T_3 — особи, имевшие один контакт с зараженными. Здоровая особь после двух контактов с зараженными удаляется из популяции.

Введем производящие функции переходных вероятностей ($|s_1| \leq 1, |s_2| \leq 1, |s_3| \leq 1$) $F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} s_3^{\beta_3}$ и экспоненциальную (двойную) производящую функцию переходных вероятностей $\mathcal{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=0}^{\infty} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} (\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!)^{-1} F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3)$.

Первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей приводится (см. [2]) к виду

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda_1 z_1 z_2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \lambda_2 z_1 z_3 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_3} \right) + \lambda_3 z_1 \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} \right),$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2 + z_3 s_3}$.

Для поглощающих состояний $(0, \gamma_2, \gamma_3)$, $\gamma_2, \gamma_3 = 0, 1, 2, \dots$, процесса $\xi(t)$ определим финальные вероятности $q_{(0, \gamma_2, \gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{(0, \gamma_2, \gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t)$, $\sum_{\gamma_2, \gamma_3=0}^{\infty} q_{(0, \gamma_2, \gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = 1$. Введем производящую функцию финальных вероятностей ($|s_2| \leq 1, |s_3| \leq 1$) $\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s_2, s_3) = \sum_{\gamma_2, \gamma_3=0}^{\infty} q_{(0, \gamma_2, \gamma_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} s_2^{\gamma_2} s_3^{\gamma_3}$ и экспоненциальную производящую функцию $\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=0}^{\infty} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \times (\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!)^{-1} \Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s_2, s_3)$.

Оказывается, что $\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3)$ и $\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$\lambda_1 z_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \lambda_2 z_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_3} \right) + \lambda_3 \left(\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \right) = 0, \quad (1)$$

при граничных условиях $\Phi(0, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = e^{z_2 s_2 + z_3 s_3}$, $\Phi(z_1, 0, 0; s_1, s_2, s_3) = e^{z_1 s_1}$.

Теорема 1. Положим $\rho = \lambda_2/\lambda_1$ и $\mu = \lambda_3/\lambda_1$; пусть $\rho \neq 1$. Экспоненциальная производящая функция финальных вероятностей имеет вид

$$\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) = \int_0^\infty \exp \left\{ -\mu v + z_2 \left(1 + (s_2 - 1)e^{-v} - (s_3 - 1) \frac{e^{-\rho v} - e^{-v}}{\rho - 1} \right) + z_3 \left(1 + (s_3 - 1)e^{-\rho v} \right) \right\} \times \left[\mu + z_2 \left((s_2 - 1)e^{-v} - (s_3 - 1) \frac{\rho e^{-\rho v} - e^{-v}}{\rho - 1} \right) + z_3 (s_3 - 1) \rho e^{-\rho v} \right] J_0(2\sqrt{-\mu z_1 v}) dv,$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя порядка нуля.

Решение граничной задачи (1) получено методом Римана (ср. в [3] случай $\lambda_1 = \lambda_2$).

Следствие. Для марковского процесса $\xi(t)$ производящая функция финальных вероятностей равна ($\rho \neq 1$, $\alpha_1 \neq 0$):

$$\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(s_2, s_3) = \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty v^{\alpha_1 - 1} e^{-\mu v} \times \left(1 + (s_2 - 1)e^{-v} - (s_3 - 1) \frac{e^{-\rho v} - e^{-v}}{\rho - 1} \right)^{\alpha_2} \left(1 + (s_3 - 1)e^{-\rho v} \right)^{\alpha_3} dv. \quad (2)$$

Обозначим $(\eta_2^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}; \eta_3^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)})$ случайный вектор, соответствующий распределению (2).

Теорема 2. Пусть $x_1, x_2 \in [0, 1]$. Тогда ($\rho \neq 1$, $\alpha_1 \neq 0$)

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta_2^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}}{\alpha_2} \leq x_1, \frac{\eta_3^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}}{\alpha_2} \leq x_2 \right\} = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$

причем двумерное преобразование Лапласа для плотности $f(x_1, x_2)$ распределения вероятностей имеет вид ($\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$):

$$\begin{aligned} F(\lambda_1, \lambda_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty v^{\alpha_1 - 1} e^{-\mu v - \lambda_1 e^{-v} + \lambda_2 (e^{-\rho v} - e^{-v})/(\rho - 1)} dv. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gani J. Approaches to the modelling of AIDS. — Lecture notes in biomathematics. V. 86: Stochastic processes in epidemic theory, Heidelberg: Springer, 1990, p. 145–154.
2. Севастьянов Б. А., Калинин А. В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Доклады АН СССР, 1982, т. 264, в. 2, с. 306–308.
3. Мاستихин А. В. Решение стационарного первого уравнения Колмогорова для марковского процесса эпидемии со схемой $T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + T_3$, $T_1 + T_3 \rightarrow T_1$, $T_1 \rightarrow 0$. — Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана., сер. естественные науки, 2005, в. 2 (17), с. 75–86.