

И. И. Б о д р е н к о (Волгоград, ВолГУ). Подмногообразие с рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны.

Пусть F^n — n -мерное ($n \geq 2$) гладкое подмногообразие в $(n+p)$ -мерном ($p \geq 2$) пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(c)$. Обозначим b вторую фундаментальную форму F^n , $\bar{\nabla}$ — связность Ван дер Вардена–Бортолотти. Форма b называется *параллельной*, если $\bar{\nabla}b \equiv 0$. Ненулевую форму b назовем *рекуррентной*, если существует такая 1-форма μ на F^n , что $\bar{\nabla}b = \mu \otimes b$. Будем говорить, что F^n принадлежит множеству $\mathcal{R}_b$, если F^n имеет рекуррентную вторую фундаментальную форму b .

Для любой точки $x \in F^n$ обозначим, соответственно, $T_x F^n$ и $T_x^\perp F^n$ касательное и нормальное пространства к F^n в x . Будем говорить, что F^n несет в некоторой области $U \subset F^n$ сопряженную систему $\{L_1^{k_1}, \dots, L_m^{k_m}\}$ ($k_1 + \dots + k_m = n$, $\dim L_i^{k_i} = k_i$, $i = 1, \dots, m$), если $T_y F^n = L_1^{k_1}(y) \oplus \dots \oplus L_m^{k_m}(y)$ в каждой точке $y \in U$, все распределения $L_i^{k_i}$, $i = 1, \dots, m$, гладкие, инволютивные и попарно сопряженные. Кроме того, если $L_i^{k_i}$ попарно вполне ортогональны, то сопряженная система называется *ортогональной*. Подмногообразие $F \subset F^n$ назовем *поверхностью кривизны F^n* , если в каждой точке $x \in F$ его касательные подпространства $T_x F$ являются собственными подпространствами матриц B_ξ второй фундаментальной формы b относительно произвольной нормали $\xi \in T_x^\perp F^n$.

Теорема. Пусть F^n в $M^{n+p}(c)$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_b$. Если $\bar{\nabla}b \neq 0$ в точке $x \in F^n$, то x принадлежит некоторой области $U \subset F^n$, в которой:

- 1) F^n несет ортогональную сопряженную систему $\{L_1^1, L_2^{n-1}\}$;
- 2) F^n является прямым римановым произведением $F_1^1 \times F_2^{n-1}$ максимальных интегральных подмногообразий F_1^1, F_2^{n-1} распределений L_1^1, L_2^{n-1} , соответственно;
- 3) F_i^1 ($i = 1, 2$) является линией кривизны, а F_2^{n-1} при $n > 2$ — поверхностью кривизны подмногообразия F^n в $M^{n+p}(c)$.

Лемма 1. Пусть F^n в $M^{n+p}(c)$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_b$. Если $\bar{\nabla}b \neq 0$ в каждой точке $x \in F^n$, то F^n является эйнштейновым с эйнштейновой константой $\lambda = c(n-1)$.

Определим в $T_x^\perp F^n$ линейное подпространство $N_0(x) = \{\xi(x) \in T_x^\perp F^n \mid A_{\xi(x)} = 0\}$. Обозначим $N_1(x)$ ортогональное дополнение $N_0(x)$ в $T_x^\perp F^n$: $T_x^\perp F^n = N_0(x) \oplus N_1(x)$; $N_1(x)$ называется *первым нормальным пространством* подмногообразия F^n в x . Размерность $N_1(x)$ называется *точечной коразмерностью F^n в x* .

Лемма 2. Пусть F^n принадлежит множеству $\mathcal{R}_b$. Если $\bar{\nabla}b \neq 0$ в точке $x \in F^n$, то $\dim N_1(x) = 1$.

Обозначим $\tilde{g}$ риманову метрику на $M^{n+p}(c)$, g — индуцированную риманову метрику на F^n , $\tilde{\nabla}$ и ∇ — римановы связности на $M^{n+p}(c)$ и F^n , согласованные с $\tilde{g}$ и g , соответственно. Обозначим D нормальную связность F^n в $M^{n+p}(c)$. Для любого векторного поля ξ , нормального к F^n , имеем: $\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi$, где A_ξ — второй фундаментальный тензор, соответствующий ξ . Обозначим R и $R^\perp$ тензоры кривизны связностей ∇ и D , соответственно.

Говорят, что F^n несет плоскую нормальную связность, если $R^\perp \equiv 0$ на F^n .

Лемма 3. Пусть F^n в $M^{n+p}(c)$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_b$. Если $\bar{\nabla}b \neq 0$ в каждой точке $x \in F^n$, то F^n несет плоскую нормальную связность.

Пусть N — q -мерное распределение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in F^n$ некоторое q -мерное подпространство $N(x) \in T^\perp F^n$. Говорят, что N *параллельно в нормальной связности*, если для любого нормального векторного поля $\xi \in N$ ковариантная производная $D_X \xi \in N$ для всех $X \in TF^n$.

Рассмотрим на F^n такие распределения Δ_0 и Δ_1 , что $\Delta_0(x) = N_0(x)$, $\Delta_1(x) = N_1(x)$.

Лемма 4. Пусть F^n в $M^{n+p}(c)$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_b$. Если $\bar{\nabla}b \neq 0$ в каждой точке $x \in F^n$, то Δ_0 и Δ_1 параллельны в нормальной связности.

Доказательство. теоремы. Из леммы 2 следует, что в некоторой окрестности $O(x) \subset F^n$ точки x существует такое единичное векторное поле $\xi \in T^\perp F^n$, что векторные поля $b(X, Y)$ коллинеарны ξ для всех $X, Y \in TF^n$. Включим ξ в поле ортонормированных базисов $\{n_\sigma\}_1^p$ в $T^\perp F^n$, положив $\xi = n_1$. Из леммы 3 следует, что F^n имеет в каждой точке $y \in O(x)$ n главных направлений, которые являются собственными векторами оператора $A_{\xi(y)}$. Рассмотрим ортонормированный базис $\{t_i\}_1^n \in T_y F^n$, состоящий из собственных векторов оператора $A_{\xi(y)}$. Обозначим k_i собственное значение оператора $A_{\xi(y)}$, соответствующее собственному вектору t_i : $A_{\xi(y)}t_i = k_it_i$, $i = 1, \dots, n$. Положим $nh = \sum_{j=1}^n k_j$. Из леммы 1 следует:

$$(\text{trace } A_\xi A_\xi - A_\xi^2)X = 0 \quad \text{для любого } X \in TF^n. \quad (1)$$

Тогда из (1) получим: $nhk_i - k_i^2 = 0$, $i = 1, \dots, n$, т. е. каждое k_i есть корень квадратного уравнения $k^2 - nhk = 0$. Так как $A_\xi \neq 0$, то мы можем считать после перенумерации индексов, что $k_1 = \dots = k_m = nh \neq 0$, $k_{m+1} = \dots = k_n = 0$, где $1 \leq m \leq n$. Так как $nh = \sum_{j=1}^n k_j$, то $nh = mnh$ и, следовательно, $m = 1$.

Определим в $O(x)$ два распределения L_1 и L_2 следующим образом: $L_1(y) = \{t \in T_y F^n \mid A_{\xi(y)}t = k_1 t\}$, $L_2(y) = \{t \in T_y F^n \mid A_{\xi(y)}t = 0\}$ в каждой точке $y \in O(x)$. Покажем, что L_1 и L_2 — гладкие распределения. Допустим, что $X_1, X_2, \dots, X_n$ — такие гладкие векторные поля, касательные к F^n , что X_1 и $X_2, \dots, X_n$ в точке x образуют базисы, соответственно, для $L_1(x)$ и $L_2(x)$. Определим векторные поля $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ так: $Y_1 = A_\xi X_1$, $Y_i = (A_\xi - k_1 I)X_i$, $i = 2, 3, \dots, n$. Тогда, используя (1), получим: $A_\xi Y_1 = A_\xi^2 X_1 = k_1 A_\xi X_1 = k_1 Y_1$, $A_\xi Y_i = A_\xi((A_\xi - k_1 I)X_i) = (A_\xi^2 - k_1 A_\xi)X_i = 0$, $i = 2, 3, \dots, n$. Значит, Y_1 принадлежит L_1 , а $Y_2, \dots, Y_n$ принадлежат L_2 . Так как $Y_1, \dots, Y_n$ линейно независимы в точке x , а потому и в некоторой области $U \subset O(x)$, то L_1 и L_2 имеют в U локальные базисы Y_1 и $Y_2, \dots, Y_n$, соответственно.

Покажем, что L_1 и L_2 инволютивны. В силу леммы 4, поле ξ параллельно в нормальной связности, т. е. $D_X \xi = 0$ для любого $X \in TF^n$. Следовательно, для такого ξ и для любых $X, Y \in TF^n$, учитывая, что $(\bar{\nabla}_X A_\xi)Y = (\bar{\nabla}_Y A_\xi)X$ для любых $X, Y \in TF^n$, получим: $A_\xi([X, Y]) = A_\xi(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = A_\xi(\nabla_X Y) - A_\xi(\nabla_Y X) = (\bar{\nabla}_Y A_\xi)X - (\bar{\nabla}_X A_\xi)Y + \nabla_X(A_\xi Y) - \nabla_Y(A_\xi X) + A_{D_Y \xi}X - A_{D_X \xi}Y = \nabla_X(A_\xi Y) - \nabla_Y(A_\xi X) + A_{D_Y \xi}X - A_{D_X \xi}Y = \nabla_X(A_\xi Y) - \nabla_Y(A_\xi X)$.

Если векторные поля $X, Y \in L_1$, то, пользуясь тем, что L_1 — одномерное распределение, положим $X = \nu Y_1$, $Y = \rho Y_1$ для некоторых функций ν, ρ , и находим, что $A_\xi([X, Y]) = k_1[X, Y]$. Отсюда следует, что $[X, Y] \in L_1$ для любых $X, Y \in L_1$. Если векторные поля $X, Y \in L_2$, то, учитывая, что $A_\xi X = 0$ для любого $X \in L_2$, приходим к равенству $A_\xi([X, Y]) = 0$. Следовательно, $[X, Y] \in L_2$ для любых $X, Y \in L_2$.

Ясно, что L_1, L_2 взаимно ортогональны и сопряжены, и $T_y F^n = L_1(y) \oplus L_2(y)$ в каждой точке $y \in U$. Таким образом, в области U распределения L_1, L_2 образуют ортогональную сопряженную систему. Утверждение 1) теоремы доказано.

Для завершения доказательства утверждения 2) осталось показать, что распределения L_1 и L_2 параллельны в связности ∇ . Учитывая, что $R^\perp \equiv 0$ в силу леммы 3, сначала заметим, что $Y(k_1) = 0$ для любого $Y \in L_2$. Отсюда следует, что $A_\xi(\nabla_Y X - \nabla_X Y) = k_1 \nabla_Y X$ для любых $X \in L_1, Y \in L_2$. Представим векторные поля $\nabla_Y X$ и $\nabla_X Y$ так: $\nabla_Y X = Z_1 + Z_2$, $\nabla_X Y = V_1 + V_2$, где $Z_1, V_1 \in L_1$, $Z_2, V_2 \in L_2$. Тогда $A_\xi(\nabla_Y X - \nabla_X Y) = A_\xi(Z_1 - V_1 + Z_2 - V_2) = A_\xi(Z_1 - V_1) + A_\xi(Z_2 - V_2) = k_1(Z_1 - V_1)$. С другой стороны, $A_\xi(\nabla_Y X - \nabla_X Y) = k_1(Z_1 + Z_2)$. Следовательно, $Z_2 = 0$, $V_1 = 0$. Таким образом, $\nabla_Y X \in L_1$, $\nabla_X Y \in L_2$ для любых $X \in L_1, Y \in L_2$. Далее, для любого $Z \in TF^n$ справедливо равенство $g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = 0$. Если $Z \in L_1$, то отсюда находим, что $g(\nabla_Z X, Y) = 0$. Аналогично, для $Z \in L_2$ находим, что

$g(X, \nabla_Z Y) = 0$. Следовательно, справедливы соотношения: $\nabla_Z X \in L_1$ для любого $Z \in L_1$ и $\nabla_Z Y \in L_2$ для любого $Z \in L_2$.

Таким образом, в области U можно ввести такие координаты $(u^1, \dots, u^n)$, что векторные поля $\partial/\partial u^1$ и $\partial/\partial u^2, \dots, \partial/\partial u^n$ порождают распределения L_1 и L_2 , соответственно. Кроме того, $g(\partial/\partial u^1, \partial/\partial u^1) = g_{11}(u^1)$, $k_1 = k_1(u^1)$, $g(\partial/\partial u^i, \partial/\partial u^j) = g_{ij}(u^2, \dots, u^n)$, $g(\partial/\partial u^1, \partial/\partial u^j) = 0$, $i, j = 2, 3, \dots, n$. Отсюда следует, что в F^n области U является прямым римановым произведением максимальных интегральных многообразий F_1^1 и F_2^{n-1} распределений L_1 и L_2 , соответственно: $F^n = F_1^1 \times F_2^{n-1}$. Утверждение 2) теоремы доказано.

Для доказательства утверждения 3) теперь достаточно заметить, что для $i, j = 2, 3, \dots, n$

$$b\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^1}\right) = k_1(u^1)g_{11}(u^1)\xi, \quad b\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = 0, \quad b\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = 0.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В области U , определенной условиями теоремы, $\mu = d \ln |H|$.

Подмногообразие F^n называется *локально приводимым*, если в некоторой окрестности каждой своей точки F^n несет такую ортогональную сопряженную систему $\{L_1^{k_1}, \dots, L_m^{k_m}\}$ ($m \geq 2$), что все распределения $L_i^{k_i}$, $i = 1, \dots, m$, параллельны в связности ∇ . В противном случае подмногообразие F^n называется *неприводимым*.

Следствие 1. Пусть F^n — неприводимое подмногообразие в $M^{n+p}(c)$. Если F^n принадлежит множеству $\mathcal{R}_b$, то F^n имеет параллельную вторую фундаментальную форму b .

Следствие 2. Пусть F^n — n -мерное подмногообразие в односвязном пространстве $M^{n+p}(c)$. Если F^n принадлежит множеству $\mathcal{R}_b$ и $\bar{\nabla}b \neq 0$ в каждой точке $x \in F^n$, то F^n является объединением замыканий своих областей, каждая из которых:

1) является открытой частью прямого риманова произведения $F_1^1 \times F_2^{n-1}$ кривой F_1^1 с кривизной $k_1 \neq \text{const}$ и $(n-1)$ -мерного внутренне плоского вполне геодезического в F^n подмногообразия F_2^{n-1} ;

2) содержится в некотором $(n+1)$ -мерном вполне геодезическом подмногообразии $M^{n+1} \subset M^{n+p}(c)$.