

Л. Н. К и р и л л о в а (Ставрополь, СГУ). **Приближенное построение собственного вектора нелинейного оператора, отвечающего ведущему собственному значению.**

Рассматривается задача нахождения собственных значений уравнения

$$\lambda x = F(x), \quad (1)$$

где F — оператор, необязательно линейный, действующий в банаховом пространстве E , полуупорядоченном конусом K , причем $F(x) \in K$ при $x \in K$, иными словами, F — положительный оператор. При определенных предположениях относительно F (или K) уравнение (1) имеет для некоторого $\lambda = \lambda_0$ решение x^* , принадлежащее K . К отысканию собственных векторов линейных или нелинейных операторов приводят важные физические, технические и экономические задачи. Собственный вектор может быть найден точно лишь в весьма частных случаях, поэтому возникает задача приближенного построения собственного вектора.

Выделяется соответствующий класс нелинейных операторов $F(x)$, действующих в полуупорядоченном банаховом пространстве, являющийся монотонным относительно нормального конуса K и таким, что $F(\alpha x) \leq \alpha^\mu F(x)$ для всех $x \in K$ и $\alpha \in [1, \infty)$, где $\mu < 1$, $\mu = \text{const}$ [1].

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что x и y принадлежат *одной составляющей* $C_K(x)$ конуса K , если существуют такие конечные числа λ и μ , что $x \leq \lambda y$, $y \leq \mu x$, а сами элементы x и y в этом случае будем называть *связными*.

Отношение связности очевидным образом транзитивно, т. е. если x связан с y , а y — с z , то x связан с z . Составляющую конуса K , содержащую элемент u_0 , будем обозначать $C_K(u_0)$.

Если в полуупорядоченном банаховом пространстве E с конусом K ввести следующую метрику: для двух таких элементов $x, y \in K$, что

$$x \leq \lambda y, \quad y \leq \mu x, \quad (2)$$

положить $d(x, y) = \ln \max\{\lambda_0, \mu_0\}$, где λ_0, μ_0 — соответственно, точные нижние границы всех чисел λ, μ , для которых выполняется неравенства (2), то, во-первых, $d(x, y)$ удовлетворяет всем аксиомам метрики, и, во-вторых, для нормального конуса K всякая компонента связности C_K конуса K становится полным метрическим пространством в метрике $d(x, y)$, а оператор $F(x)$ является оператором сжатия соответствующей компоненты связности. При этом собственные векторы оператора $F(x)$ из конуса K являются неподвижными точками оператора $(1/\lambda)F(x)$, а каждая фундаментальная по метрике $d(x, y)$ последовательность элементов $\{x_n\}$ является фундаментальной и по норме пространства E , и наоборот. При этом пределы последовательностей $\{x_n\}$ по норме пространства E и по метрике $d(x, y)$ совпадают.

Относительно введенной метрики каждая составляющая $C_K(u_0)$ конуса K является полным метрическим пространством, что позволяет применить к соответствующим операторам принцип Банаха сжатых отображений.

Теорема. Пусть конус K нормален и пусть для некоторого $u_0 > 0$ элементы u_0 и $F(u_0)$ принадлежат одной составляющей конуса K . Тогда для всех $\lambda > 0$ оператор $F(x)$ имеет на составляющей $C_K(u_0)$ собственный вектор $x^*(\lambda)$, отвечающий собственному значению λ . Этот вектор может быть построен методом последовательных приближений $x_{m+1}(\lambda) = (1/\lambda)F(x_m(\lambda))$ при любом начальном приближении $x_0 \in C_K(u_0)$. При этом справедлива оценка близости

$$d(x^*(\lambda), x_{m+1}(\lambda)) \leq \frac{\mu^m}{1 - \mu} d(x_1(\lambda), x_0(\lambda)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969, 456 с.