В. В. Ч е р н я е в (Ставрополь,СевКавГТУ). **Простейшие предфрактальные деревья.**

Рассматриваются предфрактальные графы, порожденные *простейшей* затравкой $H = (W, Q)$, представляющей собой простейшее двухвершинное дерево (более простого связанного графа, имеющего одно ребро, не существует). Очевидно, что $|W| = 2$, $|Q| = 1$. Обозначим эту затравку H_1. Предфрактальные графы, образованные по правилам замещения вершины затравкой (ЗВЗ) [1] и порождаемые данной затравкой, назовем *простейшими* и будем обозначать TG_L. При этом, в соответствии с определением предфрактальных графов, $TG_1 = H_1$. Далее, TG_2 будет представлять собой простую четырех вершинную цепь, а TG_3 может быть представлено уже тремя неизоморфными друг другу графами (рис. 1).

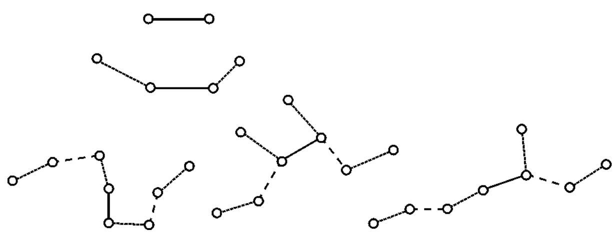

Рис. 1

На рис. 1 ребра первого ранга на всех графах обозначены сплошной линией, второго ранга — штриховой и третьего — пунктирной линией.

Доказываются различные топологические и метрические свойства простейших предфрактальных графов.

С в о й с т в о 1. Любой простейший предфрактальный граф TG_L является деревом с числом вершин 2^L и числом ребер $2^L - 1$.

В дальнейшем, простейшие предфрактальные графы TG_L будем называть *простейшими предфрактальными деревьями* (ППД).

С в о й с т в о 2. Число m висячих вершин в простейших предфрактальных деревьях удовлетворяет соотношению $2 \leqslant m \leqslant 2^{L-1}$ $(L \geqslant 2)$, при $L = 1$: $m = 2$ (граф H_1).

С в о й с т в о 3. Диаметр и радиус простейшего предфрактального дерева TG_L удовлетворяют соотношениям: $2L - 1 \leqslant D(TG_L) \leqslant 2^L - 1$, $L \leqslant r(TG_L) \leqslant 2^{L-1}$.

Перейдем к свойствам простейших предфрактальных деревьев, связанных с одним их важнейших понятий в теории графов — понятием *парасочетаний* [2].

С в о й с т в о 4. Множество ребер L-го ранга простейшего предфрактального дерева TG_L образуют реберное покрытие этого дерева, являющееся совершенным парасочетанием.

Определим операцию *свертки* $2k$-вершинного дерева, имеющего совершенное парасочетание. Каждое ребро совершенного парасочетания вместе с инцидентными ему вершинами принимается за новую вершину, а оставшиеся ребра будут новыми ребрами k-вершинного дерева, получаем дерево, соответствующее первому этапу свертки, и т. д.

Теорема 1. *2^L-вершинное дерево является простейшим предфрактальным деревом TG_L тогда и только тогда, когда оно имеет совершенное парасочетание на любом этапе свертки.*

С в о й с т в о 5. Любое простейшее предфрактальное дерево TG_L является равновесным, т. е. в нем существует ребро, при удалении которого дерево распадается на два равновершинных поддерева.

Обозначим $\{TG_L\}$ множество всех 2^L-вершинных деревьев, которые могут быть получены за L этапов ЗВЗ из затравки H_1, т.е. $\{TG_L\}$ — множество всех простейших предфрактальных деревьев L-го ранга.

Теорема 2. *Для любого $TG_L \in \{TG_L\}$ разбиение по ребру первого ранга (равновесия) приводит к лесу, состоящему из двух компонент, каждая из которых принадлежит множеству $\{TG_{L-1}\}$, т. е. являющихся ППД.*

Применив процедуру разбиения по равновесному ребру, в свою очередь, каждый из двух компонент образовавшегося леса (что будет соответствовать удалению из первоначального дерева TG_L ребер первого и второго ранга), получим лес, состоящий из четырех компонент, каждая из которых принадлежит множеству $\{TG_{L-2}\}$ и т. д. После $(L-1)$ этапа такой операции мы получим 2^{L-1}-компонентный лес. При этом каждая из компонент будет представлена двухвершинным деревом с ребром L-го ранга. Множество этих компонент составляют совершенное парасочетание первоначального ППД TG_L.

Теорема 3 (свойство сквозного равновесия)**.** *2^L-вершинное равновесное дерево является TG_L тогда и только тогда, когда на любом этапе равновесного разбиения образуются равновесные компоненты.*

Вопрос о перечислении изоморфно различных простейших предфрактальных деревьев начнем с перечисления корневых деревьев, при этом также являющихся ППД. При этом мы будем опираться на тот факт, что такое перечисление эквивалентно перечислению деревьев, обладающих свойством сквозного равновесия.

Пусть $n = 2^L$ есть число вершин рассматриваемых деревьев. Поставим вопрос: сколько существует изоморфно различных корневых деревьев с таким количеством вершин, принадлежащих при этом множеству TG_L? Чтобы ответить на этот вопрос, нам потребуется процедура *наращивания деревьев*, являющаяся обратной к процедуре равновесного разбиения. В соответствии с этой процедурой, мы будем строить (наращивать) деревья так, чтобы на любом этапе они оставались равновесными.

Введем данное построение рекуррентно. При этом будем обозначать $T_{f,2^L}$ — число изоморфно различных корневых деревьев, получающихся на l-м этапе рассматриваемой процедуры. При $L = 1$ $(n = 2)$: $T_{f,2} = 1$.

Введем понятие *конфигурации* — коренное дерево с лишним (прерванным) ребром. Двойной кружок означает корень дерева, а прерванное ребро — «свободное» ребро следующего присоединения. Это ребро в дереве следующего этапа становится ребром равновесия. На следующем этапе у нас существуют две возможности присоединения данной конфигурации к такому же коренному дереву (рис. 3, 4): первая — присоединение к коренной вершине, и вторая — присоединение к оставшейся вершине.

Рис. 2

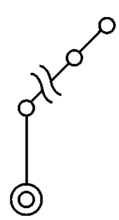

Рис. 3

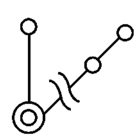

Рис. 4

Таким образом, при $L = 2$ $(n = 4)$: $t_{f,2^2} = 2$.

Продолжая предшествующие рассуждения и учитывая, что число конфигураций совпадает с числом различных корневых деревьев предшествующего этапа, получаем рекуррентную формулу $T_{f,2^L} = 2^{L_1}(T_{f,2^{L_1}})^2$. Из полученного соотношения нетрудно получить формулы для чисел $T_{f,n}$ и $t_{f,n}$, выразив их через число вершин $n = 2^L$ соответствующих деревьев.

Теорема 4. *Число $T_{f,n}$ различных корневых n-вершинных ППД равно $2^n/(2n)$, где $n = 2^L$. Число $t_{f,n}$ n-вершинных ППД равно $(2^{n/2}/(2n))(2^{n/2}/n+1)$, где $n = 2^L$.*

Введем производящие функции $T_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{f,n}x^n$ для корневых простейших предфрактальных деревьев и $t_f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_{f,n}x^n$ для простейших предфрактальных деревьев.

Если в полученных рядах считать $n = 1, 2, \ldots$, то эти ряды представляют собой ряды Маклорена следующих функций: $T^*_f(x) = -(1/2)\ln(1-2x)$, $t^*_f(x) = (1/8)\ln^2(1-4x^2)$. При этом еще раз подчеркнем, что коэффициенты этих рядов совпадают с перечислением простейших предфрактальных деревьев при степенях вида $n = 2^L$, где $L = 1, 2, 3, \ldots$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кочкаров А. М.* Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: РАН САО, 1998.
2. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 2003.