

С. В. Б о ч к а р е в (Чита, ЗабГПУ). **О решении краевых задач в кусочно-однородных средах с особыми точками потенциала.**

В области $D = D_1(y < -l) \cup D_2(-l < y < 0)$, $-\infty < \alpha < x < \beta \leq \infty$, плоскости x, y рассматривается краевая задача относительно потенциалов $u_i(x, y)$:

$$\Delta u_i = 0, \quad y \in D_i, \quad \partial_y u_2|_{y=0} = 0, \quad u_i|_{x=\alpha, \beta} = 0, \quad (1)$$

$$y = -l: \quad u_1 = u_2, \quad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2, \quad (2)$$

где $u_1(x, y)$ имеет особые точки заданной гармонической функции $f(x, y)$, которая удовлетворяет граничным условиям (1) при $x = \alpha, \beta$. Данная задача, в частности, описывает установившуюся линейную фильтрацию грунтовых вод со свободной поверхностью в кусочно-однородных средах проницаемости k_i в D_i при наличии особых точек потенциала и каналов с вертикальными границами $x = \alpha, \beta$ [1] (необходимое условие $\partial_t u_2 + p \partial_y u_2|_{y=0} = 0$ на свободной поверхности, очевидно, выполняется). По найденным потенциалам уравнение свободной поверхности определяется равенством $y = -u_2(x, 0)$.

Представляя заданную функцию $f(x, -l)$ в виде разложения Фурье: $f(x, -l) = S[g(x)]$, найдем

$$f(x, y) = S[e^{-\lambda(y+l)} g] \quad (3)$$

при $y \geq -l$ (т. е. где функция f не имеет особых точек). Отсюда, представляя потенциалы также в виде разложений Фурье, получим

$$u_1 = f(x, y) + S[ae^{\lambda(y+l)} g], \quad u_2 = S[bg \operatorname{ch} \lambda y], \quad (4)$$

где $a = (e^{-2\lambda l} - \nu)(1 - q)^{-1}$, $b = 2e^{-\lambda l}(1 - \nu)(1 - q)^{-1}$, $\nu = (k_2 - k_1)(k_2 + k_1)^{-1}$, $q = \nu e^{-2\lambda l}$, причем $|q| < 1$. Аналогично [2], разлагая $(1 - q)^{-1}$ в ряд и свертывая с помощью формулы (3) разложения (4), выразим решение задачи (1), (2) непосредственно через заданную функцию f в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= f(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n [f(x, -y + 2nl) - \nu f(x, -y + 2l(n-1))], \\ u_2 &= (1 - \nu) \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n [f(x, -y + 2nl) + f(x, -y + 2nl)]. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом полученные ряды сходятся для класса функций $f = O(y^m)$ при $|y| \rightarrow \infty$. В частности, для фундаментального решения в формулах (5) $f(x, y) = Q \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977, 680 с.
2. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания интегралов Фурье в решении краевых задач с условиями сопряжения. — Обзорение прикл. и промысл. матем., 2006, т. 13, в. 2, с. 366–367.