

С. Г. Геворкян (Обнинск, ГТУАЭ (ИАТЭ)). Системные исследования и анализ моделей рисков.

Анализ модели индивидуального риска. Работа, представленная данным сообщением, посвящена анализу моделей рисков. Рассмотрим модели индивидуального риска. Если заданы число N облученных и распределения случайных величин $X_1, \dots, X_n$, описывающих индивидуальные эффективные дозы от облученных доз, то можно смоделировать эти величины и тем самым смоделировать величину суммарной эффективной дозы к популяции: $S = X_1 + \dots + X_n$.

Если фиксирована величина предельной эффективной дозы u , то с каждым отдельным циклом моделирования совокупность эффективных доз связана случайная величина ρ , равная 1, если $S > u$, или 0, если $S \leq u$. (т.е. в соответствии с тем, есть выход стохастических эффектов или нет).

Произведем большое число k циклов моделирования. Они приведут к определенным значениям $\rho_1, \dots, \rho_k$ индикатора сообщения «есть выход стохастических эффектов». Для каждой из случайных величин ρ_i мы имеем:

$$\mathbf{E} \rho_i = \mathbf{P} \{ \rho_i = 1 \} = R, \quad \text{Var } \rho_i = \mathbf{P} \{ \rho_i = 1 \} \mathbf{P} \{ \rho_i = 0 \} = R(1 - R).$$

Поэтому суммарное число «успехов» $\rho_1 + \dots + \rho_k$ имеет среднее $k \mathbf{E} \rho = kR$ и дисперсию $k \text{Var } \rho = kR(1 - R)$. Соответственно, среднее арифметическое $\bar{R} = (\rho_1 + \dots + \rho_k)/k$ имеет математическое ожидание R и дисперсию $R(1 - R)/k$. При больших значениях k дисперсия будет мала. Поэтому случайная величина $\bar{R}$ будет мало отличаться от своего среднего значения R , и значение $\bar{R}$ можно рассматривать как приближенное значение неизвестной вероятности R .

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача. Предположим, что популяция состоит из четырех облученных. Эффективная доза в результате несчастного случая (передозировки) равна 2, если таковая предъявляется в течение года. В случае предъявления эффективной дозы облученного от «естественных» причин ее величина равна 1. Если в течение года не предъявляется ни одна эффективная доза, то ее величина равна 0. Для каждого из облученных вероятность предъявления эффективной дозы от несчастного случая равна 0,1, вероятность предъявления эффективной дозы от естественных причин равна 0,1 и, следовательно, вероятность отсутствия предъявления эффективной дозы равна 0,8. Требуется определить зависимость вероятности выхода стохастических эффектов облучения малой дозой от величины предельной дозы.

Моделирование проводится на основе программы AMIR.pas. Для определенности предполагается, что предельная доза облученной популяции $u = 4$.

Каждая эффективная доза $X_1, X_2, \dots, X_k$ моделируется отдельно. Хотя в силу их одинаковой распределенности можно было бы воспользоваться оператором цикла, мы предпочли более длинный оператор, чтобы упростить понимание программы и подчеркнуть тот факт, что в случае разной распределенности индивидуальных эффективных доз программа моделирования практически не изменяется.

Программа осуществляется $k = 10^5$ циклов моделирования. Чтобы показать устойчивость получаемой оценки, программа через каждые 10000 циклов печатает на экране число циклов и текущее значение оценки неизвестной вероятности выхода стохастических эффектов R .

Типичный результат работы программы приведен в табл.

Как и следовало ожидать, по мере роста циклов моделирования оценка $\bar{R}$ флуктуирует с затухающей амплитудой вокруг точного значения.

Таблица

10000	20000	30000	40000	50000
$1,38 \cdot 10^{-2}$	$1,49 \cdot 10^{-2}$	$1,48 \cdot 10^{-2}$	$1,43 \cdot 10^{-2}$	$1,46 \cdot 10^{-2}$
60000	70000	80000	90000	100000
$1,49 \cdot 10^{-2}$	$1,47 \cdot 10^{-2}$	$1,48 \cdot 10^{-2}$	$1,46 \cdot 10^{-2}$	$1,43 \cdot 10^{-2}$

Вывод о величине R можно получить следующим образом. В силу центральной предельной теоремы величина

$$\frac{\rho_1 + \dots + \rho_k - kR}{\sqrt{kR(1-R)}} = \sqrt{k} \frac{\bar{R} - R}{\sqrt{R(1-R)}}$$

имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому практически достоверно считать, что $-3,29 < \sqrt{k}(\bar{R} - R)/\sqrt{R(1-R)} < 3,29$ (точнее говоря, вероятность этого события равна 99,9%). Следовательно, практически достоверно, что неизвестное значение R лежит в интервале

$$\left(\bar{R} - 3,29\sqrt{\frac{R(1-R)}{k}}, \bar{R} + 3,29\sqrt{\frac{R(1-R)}{k}} \right).$$

Границы этого интервала выражены через неизвестную вероятность R , но на практике ее можно заменить оценкой $\bar{R}$. У нас $\bar{R} = 1,5\%$, $k = 10^5$. Поэтому $3,29\sqrt{R(1-R)/k} \approx 0,13\%$, т. е., базируясь на оценке $\bar{R} = 1,43\%$, мы на самом деле можем утверждать лишь, что $1,3\% < R < 1,56\%$. Иными словами, относительная погрешность $(R - \bar{R})/R$ при $k = 10^5$ циклах моделирования примерно равна 8,5%.

Эти соображения показывают, что для уменьшения относительной погрешности в 10 раз (примерно до 1%) следует увеличивать число циклов моделирования в 100 раз, т. е. примерно до 10 млн.

Анализ модели коллективного риска. Рассмотрим модель коллективного риска. Если заданы распределения π_i числа эффективных доз ν и распределение $F(x)$ величин предъявленных (возникающих) эффективных доз $y_1, y_2, \dots, y_n$, то можно смоделировать эти величины и тем самым смоделировать величину суммарной эффективной дозы $S = y_1 + \dots + y_n$. Если фиксирована величина предельной эффективной дозы u , то с каждым отдельным циклом моделирования связана случайная величина ρ , равная 1, если $S > u$, или 0, если $S \leq u$ (т. е. в соответствии с тем, был выход стохастического эффекта или нет).

Произведем большее число k циклов моделирования. Они приведут к определенным значениям $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ индикатора события «есть выход стохастических эффектов». Тогда среднее арифметическое $\bar{R} = (\rho_1 + \dots + \rho_k)/k$ может быть принято в качестве оценки искомой вероятности выходов облучения.