А. А. Грушо, Н. А. Грушо, Е. Е. Тимонина (Москва, МГУ, РГГУ). **О проблеме распознавания образов в изображениях.**

Пусть задано конечное множество $X_1 = \{x_1, \ldots, x_m\}$ допустимых цифровых изображений. Каждое изображение представляет собой слово $x = (y_1, \ldots, y_N)$ фиксированной длины N, на каждом месте которого стоит ограниченное целое число $0 < c_2 \leqslant y_i \leqslant c_1$, $i = 1, \ldots, N$. Обозначим $z_n(t)$, $t = 1, \ldots, n$, последовательности длины n изображений из X_1 и вектора $(z_n(t), t = 1, \ldots, n) \in X_1^n$. Множество допустимых последовательностей $z_n(t)$, $t = 1, \ldots, n$, длины n обозначим μ_n, $\mu_n \subseteq X_1^n$.

Рассмотрим $\mathcal{F}_n = \{f_n(t), t = 1, \ldots, n\}$ — множество допустимых распознаваемых образов (далее кратко образов) длины n в изображениях. Каждый образ представляет собой последовательность длины n целочисленных векторов $f_n(t) = (u_1^t, \ldots, u_N^t)$ длины N. Каждое значение в таких векторах ограничено $|u_i^t| \leqslant c$. Допустим, что вместе с каждым образом $f_n(t)$ образ $-f_n(t) = (-u_1^t, \ldots, -u_N^t)$ входит в $\mathcal{F}_n$. Образы встраиваются в последовательность изображений $z_n(t)$ аддитивно, т.е. если преобразуется последовательность изображений $z_n(t)$ и в нее встраивается образ $f_n(t) \in \mathcal{F}_n$, то преобразованная последовательность получается по формуле $\alpha_n(t) = z_n(t) + f_n(t)$, $t = 1, 2, \ldots, n$, где сложение представляется как сумма целочисленных векторов размера N.

Ясно, что для каждой координаты $t = 1, \ldots, n$ суммарного вектора $\alpha_n(t)$ являются целыми числами в границах $[c_2 - c, c_1 + c]$. Предположим, что $c_2 - c > 0$.

Обозначим $X = \{v_1, \ldots, v_r\}$ множество изображений, получаемых из X_1 путем всевозможных вариаций каждой целочисленной компоненты y исходного изображения вокруг своего значения в пределах $[y - c, y + c]$. Ясно, что $X_1^n \subseteq X^n$ и $\{\alpha_n(t),\ t = 1, 2, \ldots, n\} \subseteq X^n$. Обозначим $X^\infty = \{\alpha = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}, \ldots),\ v_{i_j} \in X,\ i = 1, 2, \ldots\}$. На пространстве X^∞ рассмотрим цилиндрические множества и σ-алгебру $\mathcal{A}$, порожденную цилиндрическими множествами. Пусть на множествах μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, $\mu_n \subseteq X_1^n \subseteq X^n$, определены согласованные вероятностные меры P_{0n}. Тогда на $(X^\infty, \mathcal{A})$ порождена единственная вероятностная мера P_0, соответствующая допустимым последовательностям изображений. Если рассматривать $\mu_n \times X^\infty = I_n$ как цилиндрическое множество в X^∞, то $I_n \supseteq I_{n+1}$ и существует $\lim_{n\to\infty} I_n = \cap_{n=1}^\infty I_n = \mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{M}$ — измеримое множество в $\mathcal{A}$, замкнутое в Тихоновских произведениях X^∞, и мера P_0 сосредоточена на последовательностях из $\mathcal{M}$, т. е. $P_0(\mathcal{M}) = 1$.

Обозначим $\mathcal{F} = \cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$ множество образов конечной длины, тогда $\mathcal{F}$ — не более, чем счетное множество. Будем считать, что образов $f_n(t)$, $t = 1, \ldots, n$, все координаты которых тождественно равны 0, в $\mathcal{F}$ нет.

Для каждого $f \in \mathcal{F}$ множество $\mathcal{M} + f$ является $\mathcal{A}$-измеримым. В самом деле, пусть $f \in \mathcal{F}$. Тогда $I'_k = (\mu_k + f(t)|_{1,\ldots,k}) \times X^\infty$ — цилиндрическое множество и $f(t)|_{1,\ldots,k} = 0$, где $t \geqslant k$. Тогда $\mathcal{M} + f = \cap_{n=1}^\infty I'_n$, где I'_n строятся так же, как выше.

Пусть для каждого $f \in \mathcal{F}$: $f + \varnothing = \varnothing$. Определим последовательность мер на X^n: если $D_n \subseteq \mu_n$, то $D_n + f|_{1,\ldots,n} \subseteq X^n$,

$$P_{1,f,n}(D_n + f|_{1,\ldots,n}) = P_{0n}(D_n), \quad 1 = P_{1,f,n}\Big(\bigcup_{D_n \subseteq \mu_n} D_n + f|_{1,\ldots,n}\Big).$$

Так как меры P_{0n} согласованы, то для каждого f меры $P_{1,f,n}$, $n \geqslant N$, согласованы. Тогда для каждого $f \in \mathcal{F}$ определена единственная мера $P_{1,f}$ на $(X^\infty, \mathcal{A})$. Эта мера сосредоточена на множестве $\mathcal{M} + f$ и это замкнутое множество в X^∞. Для каждого $A \in \mathcal{A}$ выполняется равенство $P_0(A \cap \mathcal{M}) = P_{1,f}(A \cap \mathcal{M} + f)$.

Рассмотрим несколько случаев. Первый случай, когда $\mathcal{M} \cap \mathcal{M} + \mathcal{F} = \varnothing$, т. е. любой образ из $\mathcal{F}$ выводит последовательность изображений за класс допустимых. Если $\mathcal{F}$ конечно, то $\cup_{\mathcal{F}} \mathcal{M} + f$ замкнуто и по теореме 3 из работы [1] существует такая состоятельная последовательность, что различение гипотез $H_0^{(n)}$: P_{0n} против

$H_1^{(n)}$: $\{P_{1,f,n}\}$ происходит с мощностью 1 на конечном шагу. Если $\mathcal{F}$ счетно, то выполняются условия теоремы 1 из [1] и существует строго состоятельная последовательность критериев для проверки $H_0^{(n)}$: P_{0n} против $H_1^{(n)}$: $\{P_{1,f,n},\, f \in \mathcal{F}\}$.

Рассмотрим случай, когда существуют такие μ и f, что $\mu + f \in \mathcal{M}$. Обозначим D множество таких μ. Если $\mu + f \in \mathcal{M}$, то $(\mu + f) - f = \mu \in \mathcal{M}$. Значит, вместе с μ, для которого существует такой f, что $\mu + f \in \mathcal{M}$, в множество D входит и $\mu + f$.

Множество D измеримо и замкнуто, т. к. $\mathcal{M}$ замкнуто, $\mathcal{M} + f$ замкнуто и $\mathcal{M} \cap \mathcal{M} + \mathcal{F} = D$ замкнуто.

Выделим два случая: 1) $P_0(D) = 0$; 2) $P_0(D) > 0$.

В случае 1) $P_0(M \setminus D) = 1$. Значит, для каждого $f \in \mathcal{F}$: $P_{1,f}(\mathcal{M} + f) = 1$ и $P_{1,f}((\mathcal{M} \setminus D) + f) = 1$, так как $P_{1,f}(\mathcal{M} \setminus D + f) = P_0(M \setminus D) = 1$. Значит, замкнутое множество $M \setminus D$ выполняет роль A_0 в теореме 2 из [1] и $(M \setminus D + f) \cap M \setminus D = \varnothing$. Тогда существует строго состоятельный критерий.

В случае 2) $P_0(D) > 0$ докажем, что нет состоятельного критерия в классе критериев, для которых критические множества S_n удовлетворяют условию: $\lim_{n\to\infty} S_n \times X^\infty = S$. Доказательство проведем от противного. Пусть существует состоятельная последовательность критериев с критическими множествами $S_1, S_2, \ldots$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P_{0n}(S_n) = \lim_{n\to\infty} P_0(S_n \times X^\infty) = P_0(\lim_{n\to\infty}(S_n \times X^\infty)) = P_0(S) = 0.$$

То есть $P_0(\mathcal{M} \cap S) = 0$, но $P_0(\mathcal{M}) = 1$.

Если какое-либо измеримое подмножество D' множества D лежит в S и $P_0(D') > 0$, то $P_0(S) \geqslant P_0(D') > 0$, что противоречит условию состоятельности.

Пусть при $f \in \mathcal{F}$: $\mathcal{M}_f$ — такое подмножество всех точек из D, что $\mathcal{M}_f + f \subseteq D$. Обозначим $\mathcal{M}_f + f = L_f$. Для любого $f \in \mathcal{F}$ $\mathcal{M}_f$ и L_f измеримы, т.к. $L_f = \mathcal{M} + f \cap \mathcal{M}$ измеримо и $\mathcal{M}_f = L_f - f$, тогда $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_f - f \cap \mathcal{M}$. Отсюда для некоторого $f \in \mathcal{F}$: $P_{1,f}(L_f) = P_0(\mathcal{M}_f) > 0$. В противном случае $P_0(D) = P_0(\cup_{f\in F} \mathcal{M}_f) = 0$. Из условия состоятельности для каждого $f \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P_{1,f,n}(S_n) &= \lim_{n\to\infty} P_{1,f}(S_n \times X^\infty)\\ &= P_{1,f}(\lim_{n\to\infty}(S_n \times X^\infty)) = P_{1,f}(S) = 1.\end{aligned}$$

Если $P_{1,f}(L_f) > 0$ и $L_f \cap S = \varnothing$, то

$$\begin{aligned}P_{1,f}(S) &= P_{1,f}(S \setminus L_f) = P_{1,f}(\mathcal{M} + f \cap (S \setminus L_f))\\ &= P_{1,f}((\mathcal{M} + f \setminus L_f) \cap S) \leqslant P_{1,f}(\mathcal{M} + f \setminus L_f) < 1,\end{aligned}$$

что противоречит предположению о состоятельности.

Таким образом, в этом случае нет состоятельной последовательности критериев, для которых существует $\lim_{n\to\infty}(S_n \times X^\infty) = S$, и образы статистически невыявляемы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 07-01-00484 и № 07-07-00236.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грушо А. А.*, *Тимонина Е. Е.* Некоторые связи между дискретными статистическими задачами и свойствами вероятностных мер на топологических пространствах. — Дискретн. матем., 2006, т. 18, в. 4, с. 128–135.