А. В. Калинин, А. А. Жидков (Нижний Новгород, ННГУ). **Задача об определении электрического потенциала в квазистационарном электрическом приближении для системы уравнений Максвелла.**

При моделировании различных электромагнитных процессов в системе уравнений Максвелла можно пренебречь скоростью изменения во времени вектора магнитной индукции (электрическое квазистационарное приближение). В частности, такое приближение может быть эффективно использовано при моделировании электромагнитных явлений в атмосфере Земли [1].

В этом случае система уравнений Максвелла запишется в виде

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}\vec{H}(x,t)=\frac{4\pi}{c}\vec{J}(x,t)+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}(x,t)}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\vec{E}(x,t)=0,\\&\operatorname{div}\vec{B}(x,t)=0,\quad \operatorname{div}\vec{D}(x,t)=4\pi\rho(x,t).\end{aligned}\tag{1}$$

В линейной теории считается, что выполняются следующие материальные соотношения [2]:

$$\vec{J}(x,t)=\sigma(x)(\vec{E}(x,t)+\vec{E}^{\mathrm{CT}}(x,t)),\quad \vec{B}(x,t)=\mu(x)\vec{H}(x,t),\quad \vec{D}(x,t)=\varepsilon(x)\vec{E}(x,t).\tag{2}$$

Задача об определении неизвестных функций $\vec{H}$, $\vec{B}$, $\vec{J}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$, ρ рассматривается в ограниченной области Ω пространства $\mathbf{R}^3$, диффеоморфной шаровому слою. Граница области состоит из двух компонент связности ($\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$), каждая из которых диффеоморфна сфере. Предполагается, что на границе области равны нулю нормальная компонента вектора магнитной индукции и тангенциальная компонента напряженности электрического поля (случай сверхпроводящей границы):

$$B_n(x,t)=0,\quad \vec{E}_\tau(x,t)=0,\quad \text{при}\quad x\in\partial\Omega.\tag{3}$$

В такой постановке задачи электрическое поле $\vec{E}$ может быть выражено через скалярный электрический потециал φ по формуле

$$\vec{E}(x,t)=-\operatorname{grad}\varphi(x,t).\tag{4}$$

Введем функциональное пространство $V=\{u\in H^1(\Omega)\colon\ \varphi|_{x\in\Gamma_1}=0,\ \varphi|_{x\in\Gamma_2}=\mathrm{const}\}$ со скалярным произведением $(u,v)_V=\int_\Omega\varepsilon(x)(\operatorname{grad}u\operatorname{grad}v)\,dx$. Здесь $H^1(\Omega)=W_2^1(\Omega)$ есть пространство С. Л. Соболева.

Из первого уравнения системы (1) и соотношений (2)–(4) можно получить обобщенную задачу для определения электрического потециала: *найти такую функцию $\varphi(x,t)$, что $\varphi(\cdot,t)\in V$, причем*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega\varepsilon(x)(\operatorname{grad}\varphi(x,t)\operatorname{grad}\psi(x))\,dx+4\pi\int_\Omega\sigma(x)(\operatorname{grad}\varphi(x,t)\operatorname{grad}\psi(x))\,dx\\=4\pi\int_\Omega\sigma(x)(\vec{E}^{\mathrm{CT}}(x,t)\operatorname{grad}\psi(x))\,dx,\end{aligned}$$

с начальным условием $\varphi|_{t=0}=\varphi_0(x)$ для всех функций $\psi\in V$.

Здесь предполагается, что $\varphi_0\in V$, $\vec{E}^{\mathrm{CT}}\in L_2(\Omega\times[0,T])$. В этом случае, полученное интегральное равенство может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}(\varphi,\psi)_V+a(\varphi,\psi)=l(\psi)(t),\tag{5}$$

где $a(\cdot,\cdot)$ — билинейная ограниченная симметричная форма, $l(\cdot)(t)$ — линейный ограниченный функционал в V при всех $t\in(0,T)$.

В работе, представленной данным сообщением, изучаются вопросы корректности задачи, проводится численная реализация для уравнения (5) в рамках метода конечных элементов, рассматриваются конкретные задачи, возникающие при моделировании электромагнитных процессов в атмосфере Земли.

Следует отметить, что рассматриваемая в работе задача об определении электрического потенциала относится к неклассическим задачам математической физики с уравнением, не разрешенным относительно производной по времени от неизвестной функции (уравнение соболевского типа [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мареев Е. А.*, *Трахтенгерц В. Ю.* О проблеме электрического динамо. — Известия вузов, сер. радиофизика, 1996, т. 39, № 6, с. 797–814.
2. *Дюво Г.*, *Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
3. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики. — Изв. АН, сер. матем. 1954, т. 18, № 1, с. 3–50.