

Д. А. Комиссарова, М. М. Кипнис (Челябинск, ЮУрГУ, ЧГПУ). **Об устойчивости дискретных моделей динамики популяций.**

Рассмотрим разностное уравнение

$$x_n - x_{n-1} = - \sum_{i=1}^k a_i x_{n-i}, \quad (1)$$

где $a_i \in \mathbf{R}$ ($1 \leq i \leq k$), $x_n: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$. При изучении локальных процессов уравнение (1) можно рассматривать как модель динамики популяций. На больших временных интервалах уравнение (1) используется как линеаризация логистического уравнения динамики популяций относительно стационарного решения. Устойчивость матричного варианта уравнения (1) изучена в [1].

Рассмотрим связанный с уравнением (1) симплекс в $\mathbf{R}^k$ вида

$$a_i \geq 0, \quad 0 < \sum_{i=1}^k i a_i < r. \quad (2)$$

Кук и Дьери [2] доказали, что уравнение (1) асимптотически устойчиво, если выполняется (2) при $r = 1$. Дьери и Хартунг [3] улучшили это условие, увеличив константу 1 в правой части неравенства (2) до $1 + 1/e$. Из результатов работы [4] следует, что для асимптотической устойчивости уравнения (1) достаточно выполнения условия (2) с $r = 3/2$. Мы увеличили постоянную r до $\pi/2$.

Теорема 1. Если $a_s \geq 0$ ($1 \leq s \leq k$) и

$$0 < \sum_{i=1}^k i a_i \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3)$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Можно показать, что константа $\pi/2$ в правой части (3) неулущшаема.

Следующий результат является более сильным, чем теорема 1.

Теорема 2. Если $a_s \geq 0$ ($1 \leq s \leq k$) и

$$0 < \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{2 \sin(\pi/(2(2i-1)))} < 1,$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Несмотря на то, что константа $\pi/2$ в неравенстве (3) неулущшаема, для любого k можно выбрать такое $r > \pi/2$, что условие (2) при данном r гарантирует асимптотическую устойчивость уравнения (1). Это доказывается следующей теоремой.

Теорема 3. 1. Если $a_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq k$) и выполняется неравенство

$$0 < \sum_{i=1}^k i a_i < 2k \sin \frac{\pi}{2(2k-1)},$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

2. Для всякого $R > 2k \sin(\pi/(2(2k-1)))$ найдется такая точка $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{R}^k$, что $a_i \geq 0$ для любого i ($1 \leq i \leq k$), $0 < \sum_{i=1}^k i a_i < R$ и уравнение (1) с коэффициентами $a_1, \dots, a_k$ не является асимптотически устойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kipnis M. M., Komissarova D. A.* Stability of a delay difference system. — Adv. Differ. Equations, 2006, Article ID31409, p. 1-9.
2. *Cooke K. L., Györi I.* Numerical approximation of the solutions of delay differential equations on an infinite interval using piecewise constant arguments. — Comp. Math. Appl., 1994, v. 28, p. 81–92.
3. *Györi I., Hartung F.* Stability in delay perturbed differential and difference equations. — Fields Inst. Commun., 2001, v. 29, p. 181–194.
4. *Tang X. H., Zhiyuan Jiang.* Asymptotic behavior of Volterra difference equations. — J. Differ. Equations. Appl., 2007, v. 13, № 1, p. 25-40.