Н. М. Я п а р о в а (Челябинск, ЮУрГУ). **Об оптимальности по порядку конечномерных аппроксимаций регуляризованных решений.**

При реализации методов решения требуется замена исходной бесконечномерной задачи ее конечномерным аналогом. При этом важную роль играет величина погрешности полученных решений.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $A: H \rightarrow H$ — линейный, положительно определенный вполне непрерывный оператор. Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \quad u, f \in H. \quad (1)$$

Предположим, что при $f = f_0$ существует $u_0 \in M_r$ — точное решение уравнения (1), $M_r = BS_r$, где $B: V \rightarrow U$ — линейный, ограниченный оператор, а $S_r = \{v: v \in H, \|v\| \leq r\}$ и $B = g(A)$, $g(\sigma)$ — строго возрастающая функция при $\sigma \in [0, \|A\|]$ и $g(0) = 0$.

Множество $M_r = BS_r$ называют *классом корректности* для исходной задачи.

Вместо f_0 нам известен такой элемент $f_\delta \in H$ и $\delta > 0$, что $\|f_\delta - f_0\| < \delta$. Требуется построить приближенное решение u_α и оценить его отклонение от точного.

Рассмотрим семейство операторов $\{R_\alpha(A): 0 < \alpha \leq \alpha_0\}$,

$$R_\alpha(A) = \Phi(A, \alpha), \quad (2)$$

где $\Phi(\sigma, \alpha)$ — непрерывная по σ , неотрицательная функция, и

$$R_\alpha(A)Au \rightarrow u \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (3)$$

Элемент $u_\alpha = R_\alpha(A)f = R_\alpha(A)Au$ будем называть *регуляризованным решением*.

Пусть $\bar{A}: H \rightarrow H$ — самосопряженный линейный неотрицательный конечномерный оператор и $\|A - \bar{A}\| \leq h$, тогда элемент $\bar{u}_\alpha$ такой, что $\bar{u}_\alpha(A) = \Phi(\bar{A}, \alpha)f_\delta$, называют *конечномерной аппроксимацией* регуляризованного решения.

Для оценки отклонения $\bar{u}_\alpha$ от u_0 на множестве M_r используем функцию [2]:

$$\Delta[h, \delta] = \sup_{u_0, f_\delta, \bar{A}} \left\{ \|R_\alpha(\bar{A})f_\delta - u_0\| : \|\bar{A} - A\| \leq h, \|Au_0 - f_\delta\| \leq \delta \right\}. \quad (4)$$

Рассмотрим $\omega(\tau, r)$ — модуль непрерывности обратного оператора в нуле [3], который определен формулой $w(\tau, r) = \sup\{\|u\|: u \in M_r, \|Au\| \leq \tau\}$.

Конечномерные аппроксимации будем называть *оптимальными по порядку* на множестве M_r , если существует такое k , что для любого $\delta \in (0, \delta_0)$: $\Delta[h, \delta] \leq k\omega(\tau(h, \delta), M_r)$.

Найдены условия, при выполнении которых будет справедливо соотношение

$$\Delta[h, \delta] \sim C\omega(r\|B\|h + \delta, r) \quad \text{при} \quad \delta, h \rightarrow 0, \quad (5)$$

где $C = \text{const}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Танана В. П.* Об оптимизации методов регуляризации при решении вырожденных операторных уравнений. — Изв. ВУЗов, математика, 1985, № 9, с. 75–76.
2. *Иванов В. К.* О равномерной регуляризации неустойчивых задач. — Сиб. матем. журнал, 1966, т. 7, № 3, с. 546.
3. *Иванов В. К., Королюк Т. И.* Об оценке погрешности при решении некорректных задач. — Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 1, с. 30–41.