

Н. В. Грибова (Санкт-Петербург, ПГУПС). **О состоятельности $M \ll N$ -бутстреп-аппроксимации распределения усеченного среднего в отсутствие его асимптотической нормальности.**

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с. в.) с функцией распределения (ф. р.) F , $X_{1:N} \leq \dots \leq X_{N:N}$ ($N = 1, 2, \dots$) — соответствующий вариационный ряд, F_N — эмпирическая ф. р., основанная на первых N наблюдениях. Определим инверсию ф. р. $F^{-1}(u) = \inf\{x: F(x) \geq u\}$, $u \in (0, 1)$. Рассмотрим бутстреп-выборку $X_1^*, \dots, X_M^*$ объема M , т. е. M независимых (условно, при условии $X_1, \dots, X_N$) с. в. с ф. р. F_N , обозначим F_M^* соответствующую эмпирическую ф. р. и введем непрерывные слева инверсии эмпирических ф. р. F_N^{-1} и $(F_M^*)^{-1}$ (определяемые аналогично F^{-1}).

Рассмотрим усеченное среднее и его бутстреп-версию:

$$T_N = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} F_N^{-1}(u) du, \quad T_{N,M}^* = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} (F_M^*)^{-1}(u) du,$$

где $0 < \alpha < \beta < 1$ — фиксированные числа (наш результат справедлив также и для статистики, заданной классической формулой $T_N = ([\beta N] - [\alpha N])^{-1} \sum_{i=[\alpha N]+1}^{[\beta N]} X_{i:N}$, с соответствующей бутстреп-версией $T_{N,M}^* = ([\beta M] - [\alpha M])^{-1} \sum_{i=[\alpha M]+1}^{[\beta M]} X_{i:M}^*$). Хорошо известно, что усеченное среднее служит оценкой параметра сдвига вида $\mu(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} F^{-1}(u) du$. Необходимым и достаточным условием асимптотической нормальности T_N является непрерывность функции F^{-1} в точках α и β [5]. При этом условии бутстреппированное усеченное среднее $T_{N,M}^*$ распределено тоже асимптотически нормально (см. [1], [4]), если $\min(N, M) \rightarrow \infty$, и бутстреп-процедура работает корректно.

В работе, представленной данным сообщением, мы рассматриваем общую ситуацию, при которой функция F^{-1} может иметь разрывы в точках α и/или β . Мы доказываем, что, хотя асимптотическое распределение T_N в этом случае отлично от нормального, и классический бутстреп Эфрона ($M = N$) несостоятелен, тем не менее, $M \ll N$ -бутстреп-процедура работает корректно. Будем предполагать выполненным только естественное условие невырожденности: $F^{-1}(\alpha) \neq F^{-1}(\beta)$.

Имеет место следующий результат.

Теорема.

$$\sup_{x \in R} |P\{N^{1/2}(T_N - \mu(\alpha, \beta)) \leq x\} - P^*\{M^{1/2}(T_{N,M}^* - T_N) \leq x\}| \xrightarrow{P} 0, \quad (1)$$

если $\min(N, M) \rightarrow \infty$, $M/N \rightarrow 0$, и если $(M \log \log N)/N \rightarrow 0$, то соотношение (1) имеет место с вероятностью единица.

При доказательстве используется подход, развитый в работах [3], [4]. Некоторые другие результаты, касающиеся свойств $M \ll N$ -бутстрепа для ряда статистик, можно найти в [2].

Доклад основан на результатах совместной работы с R. Helmers (CWI, Amsterdam, The Netherlands).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bickel P. J., Freedman D. A. Some asymptotic theory for the bootstrap. — Ann. Statist., 1981, v. 9, p. 1196–1217.
2. Bickel P. J., Götze F., van Zwet W. R. Resampling fewer than n observations: gains, losses and remedies for losses. — Statistica Sinica, 1997, v. 7, p. 1–31.
3. Gribkova N. V., Helmers R. The empirical Edgeworth expansion for a Studentized trimmed mean. — Math. Methods Statist., 2006, v. 15, p. 61–87.

4. *Gribkova N. V., Helmers R.* On the Edgeworth expansion and the M out of N bootstrap accuracy for a Studentized trimmed mean. — *Math. Methods Statist.*, 2007, v. 16 (в печати).
5. *Stigler S. M.* The asymptotic distribution of the trimmed mean. — *Ann. Statist.*, 1973, v. 1, p. 472–477.