Е. В. Булинская, Н. А. Аржанова (Москва, МГУ). **Стохастические модели страхования с ограничениями в рамках стоимостного подхода.**

В работе, представленной данным сообщением, исследуются стохастические модели страхования с дискретным временем с использованием стоимостного подхода, введенного в [1] и развитого в [2]. Предположение о том, что решения принимаются страховой компанией периодически, представляется разумным, поскольку обычно финансовый баланс подводится в конце календарного года, длительность договоров перестрахования также равна одному году.

Ниже рассматриваются два класса моделей. Особенность первого состоит в том, что для предотвращения разорения компания в конце каждого года может принимать решение о продаже активов и/или взятии займа. При этом продажа производится немедленно, а средства от займа поступают с задержкой. В отличие от [2] вводятся ограничения на размер продаж a_1 и займов a_2. В результате минимальные средние издержки $f_n(x)$ за n лет при начальном капитале x удовлетворяют следующему уравнению Беллмана:

$$f_n(x) = -r_1 x + \min_{(u,v)\in D_x} G_n(u,v), \tag{1}$$

где $G_n(u,v) = (r_1 - r_2)v + r_2 u + L(v) + \mathbf{E} f_{n-1}(u-\xi)$, $L(v) = \mathbf{E}[r_3(\xi - v)^+ + r_4(v-\xi)^+]$, $D_x = \{(u,v)\colon x \leqslant v \leqslant x + a_1, v \leqslant u \leqslant v + a_2\}$, r_1 — потери от продажи единицы актива, r_2 — процентная ставка по займу, r_3 — штраф за задержку в оплате единичного иска, r_4 — коэффициент инфляции, а ξ — суммарный иск за год. Предполагается, что ξ имеет функцию распределения $F(x)$, обладающую плотностью $\varphi(x) > 0$ в некотором конечном или бесконечном интервале. Сформулируем один из результатов.

Теорема 1. *Пусть $a_1 = \infty$, $a_2 < \infty$ и $r_2 < r_1 - r_3$. Тогда на первом шаге n-шагового процесса оптимально продать количество активов $z_{1n} = (w_n - x)^+$ и занять $z_{2n} = \min\{a_2, (u_n - x - z_1^{(n)})^+\}$, где w_n и u_n — это соответственно корни уравнений $dG_n(w_n, w_n + a_2)/dv = 0$ и $\partial G_n(u_n, v)/\partial u = 0$. Существует $\lim_{n\to\infty} w_n \leqslant \bar{t}$, где $F(\bar{t}) = r_3/(r_3 + r_4)$.*

Второй класс моделей учитывает наличие перестрахования. Как и ранее, ξ будет представлять размер иска за год. Ежегодные премии предполагаются детерминированными и равными c. Пусть используется перестрахование эксцедента убыточности с уровнем собственного удержания b. Необходимо выбрать b, как функцию начального капитала x, таким образом, чтобы минимизировать возникающие издержки за n шагов. Иначе говоря, мы ищем функцию $f_n(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$f_n(x) = \min_{b \geqslant b_0} \{g_1(b,x) + \mathbf{E} f_{n-1}(a(b,x) - \xi)\},$$

где b_0 — минимальный уровень собственного удержания, устанавливаемый законом, $g_1(x,b) = r\mathbf{E}(\eta - a(b,x))^+$, $\eta = \min\{\xi, b\}$, $a(b,x) = x + c - \rho\mathbf{E}(\xi - b)^+$, r — процентная ставка за ссуду при нехватке средств для удовлетворения иска, а ρ учитывает нагрузку премии перестрахования.

Приведем простейший результат.

Теорема 2. *Пусть $b_0 = 0$, $n = 1$, тогда при $x < x_1$ оптимальный уровень собственного удержания $b(x) = \infty$ (т. е. перестрахование не используется), $b(x) = \overline{b}(x)$, если $x_1 \leqslant x < x^*$ и $b(x) = b^*$, когда $x \geqslant x^*$. Здесь $b^* = \overline{F}(\rho^{-1})$, $x_1 = b^* - c$, $x^* = b^* - c + \rho\mathbf{E}(\xi - b^*)$, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, а $\overline{b}(x)$ определяется из уравнения $a(\overline{b}(x), x) = b^*$.*

Исследовано предельное поведение капитала компании при $n \to \infty$. Также изучена чувствительность моделей к изменениям параметров.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 07-01-00362.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булинская Е. В.* О стоимостном подходе в страховании. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2003, т. 10, в. 2, с. 276–286.
2. *Bulinskaya E. V.* Some aspects of decision making under uncertainty. — J. Statist. Plann. Inference, 2007, v. 137, № 8, p. 2613–2632.