

А. А. Фролов (Москва, ТВП). **Новое семейство инволютивных $(v, 5)$ -групп.**

Работа, представленная данным сообщением, посвящена вопросу описания инволютивных $(v, 5)$ -групп. Приведем определения из работы [1].

О п р е д е л е н и е 1. Пара (G, H) , где G — конечная группа, а $H \subset G$ — ее непустое подмножество, называется (v, k) -группой, если $|G| = v$, $|H| = k$, и найдется $S \subset G$, $|S| = k$, удовлетворяющее условиям:

$$|H \cap S| \text{ — нечетно, } |H \cap gS| \text{ — четно для любого } g \in G \setminus \{e\}.$$

О п р е д е л е н и е 2. (v, k) -группу (G, H, S) назовем *инволютивной*, если $S = H^{-1}$ и $e \in H \cap S$.

Для описания (v, k) -групп в работе [1] предложен универсальный способ. В предположении, что группа является инволютивной, он примет следующий вид. Для таких разбиений

$$\overline{1, k-1}^2 = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{N}_\alpha, \quad |\mathfrak{N}_\alpha| = 2, \quad (1)$$

что $i \neq r$ и $j \neq t$ для различных $(i, j), (r, t) \in \mathfrak{N}_\alpha$, составляется система соотношений

$$h_i h_j = h_r h_t, \quad (i, j), (r, t) \in \mathfrak{N}_\alpha, \quad \alpha \in A. \quad (2)$$

Тогда задача состоит в описании для каждого разбиения всех конечных групп с абстрактной системой образующих $h_1, \dots, h_{k-1}$, для которых выполняются соотношения (2), а также некоторые дополнительные соотношения. Для построения (v, k) -группы также необходимо, чтобы все элементы $e, h_1, \dots, h_{k-1}$ были различны. В этом случае (G, H, H^{-1}) — (v, k) -группа, где $H = \{e, h_1, \dots, h_{k-1}\}$, $G = \langle H \rangle$, $|G| = v$.

Два разбиения $\bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{N}_\alpha$ и $\bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{M}_\alpha$ вида (1) назовем *эквивалентными*, если найдется такая подстановка $\pi \in S_4$, что для любого $\alpha \in A$ существует $\beta \in A$:

$$\mathfrak{M}_\alpha = \{(\pi(i), \pi(j)), (\pi(r), \pi(t))\}, \quad \mathfrak{N}_\beta = \{(i, j), (r, t)\}$$

или

$$\mathfrak{M}_\alpha = \{(\pi(i), \pi(j)), (\pi(r), \pi(t))t\}, \quad \mathfrak{N}_\beta = \{(j, i), (t, r)\}.$$

Эквивалентные разбиения задают одинаковые множества инволютивных (v, k) -групп или множества инволютивных (v, k) -групп, отличающихся заменой тройки (G, H, S) на тройку (G, S, H) .

Пусть теперь $k = 5$. Заметим, что тогда для любого разбиения (1) найдется эквивалентное ему разбиение $\bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{M}_\alpha$, удовлетворяющее одному из свойств:

- (а) $\mathfrak{M}_\alpha = \{(1, 1), (2, 2)\}$ для некоторого $\alpha \in A$;
- (б) $\mathfrak{M}_\alpha = \{(1, 1), (2, 3)\}$ для некоторого $\alpha \in A$.

Ряд групп, связанных с разбиениями, обладающими свойством (а), рассмотрены в работах [2], [3]. В таких группах для образующих выполнено соотношение $h_1^2 = h_2^2$.

В докладе рассматривается одно семейство групп, получаемых при рассмотрении разбиений, обладающих свойством (б). Для таких групп выполнено соотношение $h_1^2 = h_2 * h_3$. Дополнительно потребуем наличия соотношений $h_1 * h_2 = h_2 * h_4$ и $h_1 * h_3 = h_2 * h_1$ (соответствующие (v, k) -группы заведомо неабелевы). Тогда такому набору соотношений будут удовлетворять все неабелевы группы с двумя образующими α и τ , где $\tau^2 = e$ и множество $H = \{e, \tau * \alpha, \tau * \alpha * \tau, \alpha, \alpha * \tau\}$. Примером таких групп может служить симметрическая группа S_n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мамышев Ф. М., Тараканов В. Е. О (v, k) -конфигурациях. — Матем. сб., 2001, т. 192, № 9, с. 85–108.
2. Фролов А. А. Описание абелевых $(v, 5)$ -групп. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 2.
3. Фролов А. А. Класс инволютивных неабелевых $(v, 5)$ -групп. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, в. 1.