Н. А. Колодий (Волгоград, ВолГУ). **Непрерывность по параметру решения стохастического уравнения Вольтерра на плоскости.**

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_z, z \in \mathbf{R}^2_+)$ — двупараметрическое семейство σ-алгебр, удовлетворяющих условиям: 1) если $x \leqslant z$, то $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{F}_z \subset \mathcal{F}$; 2) $\mathcal{F}_0$ содержит все элементы $\mathcal{F}$ нулевой вероятности; 3) $\mathcal{F}_z = \cap_{x>z}\mathcal{F}_x$ для любого z; 4) для любых x и z σ-алгебры $\mathcal{F}_x$ и $\mathcal{F}_z$ условно независимы относительно $\mathcal{F}_{x\wedge z}$. Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$ обозначают σ-алгебры $\mathbf{F}$-прогрессивно измеримых и $\mathbf{F}$-предсказуемых подмножеств $\mathbf{R}^2_+ \times \Omega$. Пусть λ — локально конечная мера на $(\mathbf{R}^2_+, \mathcal{B}(\mathbf{R}^2_+))$, X_λ обозначает пространство всех таких $\mathcal{B}(R^2_+)|\mathcal{B}(R)$-измеримых функций g: $\mathbf{R}^2_+ \to \mathbf{R}$, что $\|g\|_z = (\int_{[0,z[} g^2\, d\lambda)^{1/2} < \infty$ для каждого $z \in \mathbf{R}^2_+$. Для $g \in X_\lambda$ и $x \in \mathbf{R}^2_+$ определим $g_x \in X_\lambda$ равенством $g_x(u) = g(u) I^{(u)}_{[0,x[}$. Пусть Ξ_λ — пространство таких $\mathcal{T}$-измеримых полей $\xi = (\xi(z),\, z \in \mathbf{R}^2_+)$, что $\xi(\cdot, \omega) \in X_\lambda$ для каждого $\omega \in \Omega$.

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается семейство стохастических интегральных уравнений

$$\xi_i(z) = \eta_i(z) + \int_{[0,z]} a_i(z, x, \xi^{(i)}_z) A_i(z, dx) + \int_{[0,z]} b_i(z, x, \xi^{(i)}_x) M_i(z, dx), \qquad z \in \mathbf{R}^2_+, \quad (1)$$

$i = 0, 1, \ldots$, коэффициенты которых удовлетворяют условиям:

1) $\eta_i \in \Xi_\lambda$;

2) $((z,\omega), x, g) \to a_i(z, \omega, x, g) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^2_+) \otimes \mathcal{B}(X_\lambda)|\mathcal{B}(\mathbf{R})$;

3) $(z, (x,\omega), g) \to b_i(z, x, \omega, g) \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2_+) \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(X_\lambda)|\mathcal{B}(\mathbf{R})$;

4) $(z, (x,\omega)) \to M_i(z, x, \omega)$ и $(z, (x,\omega)) \to A_i(z, x, \omega)$ — $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2_+) \otimes \mathcal{T}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$-измеримые функции;

5) $(M_i(z,x), x \in \mathbf{R}^2_+)$ — сильный квадратически интегрируемый мартингал для каждого фиксированного z;

6) $(A_i(z,x), x \in \mathbf{R}^2_+)$ — поле ограниченной вариации для каждого фиксированного z.

Решением уравнения (1) называется такой элемент $\xi_i \in \Xi_\lambda$, что для каждого $z \in \mathbf{R}^2_+$ с вероятностью 1 выполнено равенство (1). Решение ξ_i называется единственным, если любое другое решение уравнения (1) является его модификацией.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $A_{i,0} = A_i - A_0$, $M_{i,0} = M_i - M_0$. Отметим, что существуют такие $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2_+) \otimes \mathcal{T}|\mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$-измеримые функции $(z, (x,\omega)) \to \overline{M}_{i,0}(z, x, \omega)$, $(z, (x,\omega)) \to \overline{M}_i(z, x, \omega)$, $(z, (x,\omega)) \to \overline{A}_{i,0}(z, x, \omega)$ и $(z, (x,\omega)) \to \overline{A}_i(z, x, \omega)$, что $\overline{M}_{i,0}(z,x)$ и $\overline{M}_i(z,x)$ являются квадратическими вариациями сильных мартингалов $M_{i,0}(z,\cdot)$ и $M_i(z,\cdot)$, а $\overline{A}_{i,0}(z,x)$ и $\overline{A}_i(z,x)$ являются вариациями полей $A_{i,0}(z,\cdot)$ и $A_i(z,\cdot)$ на прямоугольнике $[0,x]$ (см. [2]).

Условия существования и единственности решений уравнений (1) приведены в [1]. Доказательство следующего утверждения опирается на результаты работ [1] и [2].

Теорема. *Предположим, что уравнения* (1) *имеют единственные решения* ξ_i *с траекториями в* X_λ *и пусть*:

1) $\mathbf{P}\text{-}\lim_{i\to\infty} \|\eta_i - \eta_0\|_x = 0$ *для каждого* $x \in \mathbf{R}^2_+$*;*

2) *существуют такие* $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^2_+) \otimes \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$*-измеримые случайные поля* $B_i(z,x)$, $i = 0, 1, \ldots$, *что* $0 \leqslant B_i(z,x) \leqslant B_i(z',x)$ *для* $z \leqslant z'$, $|a_i(z,x,g)| \leqslant B_i(z,x)(1 + \|g\|_z)$, $|b_i(z,x,g)| \leqslant B_i(z,x)(1 + \|g\|_x)$, $|a_0(z,x,g) - a_0(z,x,g')| \leqslant B_0(z,x)(\|g-g'\|_z)$, $|b_0(z,x,g) - b_0(z,x,g')| \leqslant B_0(z,x)(\|g-g'\|_x)$, $\int_{[0,z]} B_i(z,x)\overline{A}_i(z,dx) + \int_{[0,z]} B^2_i(z,x)\overline{M}_i(z,dx) \leqslant \Gamma_i(z)$, $\int_{[0,z]} B_i(z,x)\overline{A}_{i,0}(z,dx) + \int_{[0,z]} B^2_i(z,x)\overline{M}_{i,0}(z,dx) \leqslant \Gamma_{i,0}(z)$, *где* $\Gamma_i(z)$ *и* $\Gamma_{i,0}(z)$ — *неслучайные функции*, $0 \leqslant \Gamma_i(z) \leqslant \Gamma_i(z')$ *и* $0 \leqslant \Gamma_{i,0}(z) \leqslant \Gamma_{i,0}(z')$ *для* $z \leqslant z'$, $\lim_{i\to\infty} \Gamma_{i,0}(z) = 0$ *для любого* z*;*

3) *существуют такие* $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^2_+) \otimes \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$*-измеримые случайные поля* $B_{i,n}(z,x)$, $i, n \in \mathbf{N}$, *что* $0 \leqslant B_{i,n}(z,x) \leqslant B_{i,n}(z',x)$ *для* $z \leqslant z'$, $\sup_{g\colon \|g\|_x \leqslant n} |a_i(z,x,g) - a_0(z,x,g)| \leqslant B_{i,n}(z,x)$, $\sup_{g\colon \|g\|_z \leqslant n} |b_i(z,x,g) - b_0(z,x,g)| \leqslant$

$B_{i,n}(z,x)$, $\int_{[0,z]} B_{i,n}(z,x)\overline{A}_0(z,dx) + \int_{[0,z]} B_{i,n}^2(z,x)\overline{M}_0(z,dx) \leqslant \Gamma_{i,n}(z)$, *где* $\Gamma_{i,n}(z)$ — *неслучайные функции,* $0 \leqslant \Gamma_{i,n}(z) \leqslant \Gamma_{i,n}(z')$ *для* $z \leqslant z'$, $\lim_{i\to\infty} \Gamma_{i,n}(z) = 0$ *для любых* z *и* n.

Тогда $\mathbf{P}\text{-}\lim_{i\to\infty} \|\xi_i - \xi_0\|_x = 0$ *для каждого* $x \in \mathbf{R}_+^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колодий Н. А.* Уравнения Вольтерра на плоскости со стохастическими интегралами по сильным мартингалам. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, в. 3, с. 659–661.
2. *Kolodii N. A.* Some properties of random fields related to stochastic integrals with respect to strong martingales. — J. Math. Scie., 2006, v. 137, № 1, p. 4531–4540.