

А. М. Колдй (Волгоград, ВолГУ). **Стохастические уравнения Вольтерра: условия существования решений и предельные теоремы.**

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией, удовлетворяющее «обычным» условиям; $\mathbf{D}$ — пространство непрерывных справа и имеющих пределы слева функций $x(\cdot): \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^\ell$, $\|x\|_t = \sup_{s \leq t} |x(s)|$; $\mathcal{C}_t$ — σ -алгебра цилиндрических подмножеств $\mathbf{D}$ с координатами из $[0, t]$; $(\alpha(s))_{s \geq 0}$ — m -мерный $\mathbf{F}$ -согласованный непрерывный справа случайный процесс локально ограниченной вариации; $(\mu(s))_{s \geq 0}$ — d -мерный локальный квадратично интегрируемый $\mathbf{F}$ -мартингал с непрерывной характеристикой.

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается стохастическое интегральное уравнение

$$\xi(t) = \eta(t) + \int_0^t a(t, s, \xi) d\alpha(s) + \int_0^t b(t, s, \xi) d\mu(s), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $a(t, s, x) \in \mathcal{B}([0, u] \times \mathbf{R}_+) \otimes \mathcal{C}_u | \mathcal{B}(\mathbf{R}^{\ell \times m})$, $b(t, s, x) \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times [0, u]) \otimes \mathcal{C}_u | \mathcal{B}(\mathbf{R}^{\ell \times d})$ для любого $u \geq 0$; η — $\mathbf{F}$ -согласованный процесс с траекториями в $\mathbf{D}$.

Пусть $\mathcal{D}$ обозначает множество разбиений $\delta = \{s_0 = 0 < s_1 < \dots, \lim_j s_j = \infty\}$; $|\delta| = \sup_j (s_{j+1} - s_j)$. Для произвольного $\delta \in \mathcal{D}$ определим дискретную аппроксимацию уравнения (1):

$$\xi_\delta(t) = \eta(t) + \int_0^t a_\delta(t, s, \xi_\delta) d\alpha(s) + \int_0^t b_\delta(t, s, \xi_\delta) d\mu(s), \quad t \geq 0,$$

где $a_\delta(t, s, x) = a(t, \lambda_\delta(s), \nu_\delta(x))$, $b_\delta(t, s, x) = b(t, \lambda_\delta(s), \nu_\delta(x))$, $\lambda_\delta(s) = s_j$ для $s \in [s_j, s_{j+1}]$, $\nu_\delta(x, u) = x(s_j)$ для $u \in [s_j, s_{j+1}]$.

В докладе излагаются теоремы существования слабого решения и существования и единственности сильного решения уравнения (1), предельные теоремы для семейств уравнений вида (1) и теоремы о сходимости дискретной аппроксимации уравнения (1).

Пусть (φ, ψ) — такая пара неубывающих непрерывных функций $(\varphi(t))_{t \geq 0}$ и $(\psi(u))_{0 < u \leq 1}$, что $0 < \psi(u) \leq 1$ и $\int_0^1 \varphi(u)(\psi(u))^{-1} u^{-1-\psi(u)} du < \infty$.

Рассмотрим следующие условия.

(A1) Функция $a(t, s, x)$ непрерывна справа по t для любых фиксированных s и x . Существует такая константа $G \geq 0$, что

$$|a(t, s, x)| \leq G(1 + \|x\|_t), \quad |b(t, s, x)| \leq G(1 + \|x\|_s), \\ |b(t, s, x) - b(t', s, x)| \leq G\varphi(|t - t'|)(1 + \|x\|_s).$$

(A2) Существуют такие возрастающие положительные функции $(\varkappa(s))_{s \geq 0}$ и $(L(t))_{t \geq 0}$, что $\lim_{s \rightarrow 0} \varkappa(s) = \varkappa(0) = 0$,

$$|a(t, s, x) - a(t, u, x)| \leq \varkappa(|s - u|)L(\|x\|_t), \quad |b(t, s, x) - b(t, u, x)| \leq \varkappa(|s - u|)L(\|x\|_s), \\ |b(t', s, x) - b(t', u, x) - b(t, s, x) + b(t, u, x)| \leq \varphi(|t - t'|)\varkappa(|s - u|)L(\|x\|_s).$$

(A3) Для каждого $n \in \mathbf{N}$ существует такая возрастающая положительная функция $(\varrho_n(v))_{v \geq 0}$, что $\lim_{v \rightarrow 0} \varrho_n(v) = \varrho_n(0) = 0$ и, если $\|x\|_t \vee \|x'\|_t \leq n$, $\|y\|_s \vee \|y'\|_s \leq n$, то

$$|a(t, s, x) - a(t, s, x')| \leq \varrho_n(\|x - x'\|_t), \quad |b(t, s, y) - b(t, s, y')| \leq \varrho_n(\|y - y'\|_s), \\ |b(t', s, y) - b(t', s, y') - b(t, s, y) + b(t, s, y')| \leq \varphi(|t - t'|)\varrho_n(\|y - y'\|_s).$$

Теорема 1. Если выполнены условия (A1) и (A3) с функцией $\varrho_n(v) = C(n)v$, то уравнение (1) имеет единственное сильное решение с траекториями в $\mathbf{D}$. Сверх

того, если выполнено условие (A2), то $\lim_{|\delta| \rightarrow 0} \mathbf{P} \{ \|\xi_\delta - \xi\|_t > \varepsilon \} = 0$ для любых $\varepsilon > 0, t > 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A1) и (A3). Тогда уравнение (1) имеет слабое решение с траекториями в $\mathbf{D}$. Сверх того, если слабое решение ξ уравнения (1) является слабо единственным и выполнено условие (A2), то ξ_δ сходится по распределению к ξ при $|\delta| \rightarrow 0$.

Доказательства данных теорем основаны на использовании неравенств для моментов $\mathbf{E} \sup_{s \leq t} |\eta(s)|^p$ стохастических интегралов $\eta(t) = \int_0^t \beta(t, s) d\mu(s)$, получаемых с применением результатов работы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kolodii A. M. On existence of continuous modifications of random processes. — Theory Stochastic Process., 2000, v. 6 (22), № 1–2, p. 54–57.