А. И. Карюк, Т. В. Редькина (Ставрополь, СтавГУ). **Квазилинейное волновое уравнение, обладающее парой Лакса.**

Теорема 1. *Уравнение Лакса* $L_t = LA_AL6$ *эквивалентно нелинейному уравнению*

$$\frac{1}{\alpha_{11}}\Big(\alpha_{31}+\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}}\Big)u_z-\frac{k}{2}\Big(\alpha_{31}+\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\Big)u_x+\frac{1}{k}(\ln u)_{zz} - \alpha_{11}^2k(\ln u)_{xx}-\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}}u_z\ln u=0, \qquad (1)$$

где $\partial/\partial z = 2k\alpha_{11}\partial/\partial x+\partial/\partial t$, $u_{13}=u(x,t)$ *и операторы* $L=\alpha\partial/\partial x+u$, $A=\beta\partial/\partial x+v$,

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&0&0\\ \alpha_{21}&-\alpha_{11}&0\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&-\alpha_{11}\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}3k\alpha_{11}&0&0\\ k\alpha_{21}&k\alpha_{11}&0\\ k\alpha_{31}&k\alpha_{32}&k\alpha_{11}\end{pmatrix},\quad u=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\ u_{21}&u_{22}&u_{23}\\ u_{31}&u_{32}&u_{22}+\frac{2}{k}v_{11}\end{pmatrix},$$

$$v=\begin{pmatrix}v_{11}&ku_{12}&ku_{13}\\ ku_{21}+\frac{\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}(2v_{11}+k(u_{22}-u_{11}))&-v_{11}&ku_{23}\\ ku_{31}+\frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}}(2v_{11}+k(u_{22}-u_{11}))&ku_{32}+\frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}(2v_{11}+k(u_{22}-u_{11}))&v_{11}\end{pmatrix},$$

где $\alpha=(\alpha_{ij})$, $\beta=(\beta_{ij})$ *— постоянные* (3×3)*-матрицы,* $u(x,t)=(u_{ij})$, $v(x,t)=(v_{ij})$ *—* (3×3)*-матрицы с функциями* $u_{ij}(x,t)$, $v_{ij}(x,t)$, $i,j=1,2,3$. (Доказательство теоремы приведено в [1].)

Уравнение (1) является квазилинейным уравнением гиперболического типа и приводится к виду

$$w_{\widetilde{x}\widetilde{z}}=e^w\Big[\frac{\alpha_{31}}{8\alpha_{11}^2}w_{\widetilde{z}}-\frac{1}{8\alpha_{11}^2}\Big(3\alpha_{31}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{11}}\Big)w_{\widetilde{x}}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{16\alpha_{11}^2}(w_{\widetilde{x}}-w_{\widetilde{z}})w\Big] \qquad (2)$$

с помощью замены переменных $\widetilde{x}=-\alpha_{11}kz+x$, $\widetilde{z}=\alpha_{11}kz+x$, $u(\widetilde{x},\widetilde{z})=e^{w(\widetilde{x},\widetilde{z})}$.

Решение специального вида

Теорема 2. *Уравнение* (2) *имеет решение в виде функции* $w=f(\xi)$, *где* $\xi=\alpha_{31}\widetilde{x}+(3\alpha_{31}+\alpha_{32}\alpha_{21}/\alpha_{11})\widetilde{z}$, *а* f *определяется из обращения интеграла*

$$\int\frac{df}{C_1+e^f(1-f)}=\frac{1}{m}\Big[\alpha_{31}\widetilde{x}+\Big(3\alpha_{31}+\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\Big)\widetilde{z}\Big]+C_2,$$

$$m=16\frac{\alpha_{11}^2\alpha_{31}}{\alpha_{21}\alpha_{32}}\Big(1+\frac{\alpha_{11}\alpha_{31}}{2\alpha_{11}\alpha_{31}+\alpha_{21}\alpha_{32}}\Big),$$

где C_1, C_2 *— произвольные постоянные.*

Решение в виде бегущей волны

Теорема 3. *Уравнение* (2) *имеет решение, записанное в квадратурах*

$$\int\frac{e^{-w}\,dw}{(1-\lambda)w+B(\lambda-3)+C_1e^{-w}}=\frac{1}{A\lambda}+\frac{1}{A}\widetilde{z}+C_2,$$

где $A=16\alpha_{11}^3/(\alpha_{21}\alpha_{32})$, $B=1+2\alpha_{11}\alpha_{31}/(\alpha_{21}\alpha_{32})$, C_1, C_2 *— произвольные постоянные.*

Преобразование Беклунда

Уравнение (2) представимо в виде

$$\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}(A(w_{\widetilde{x}}-w_y)+2Be^w)=\frac{\partial}{\partial y}e^w(w-B),$$

где $\partial/\partial y = \partial/\partial\widetilde{x} - \partial/\partial\widetilde{z}$, которое является условием совместности для существования такой функции f, что $f_y = A(w_{\widetilde{x}} - w_y) + 2Be^w$, $f_{\widetilde{x}} = e^w(w - B)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карюк А. И.*, *Редькина Т. В.* Нелинейное уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка. — В сб.: Труды международной конференции «Современные методы физико-математических наук». Т. 1. Орел: Изд-во ОГУ, 2006, с. 70–75.
2. *Полянин А. Д.*, *Зайцев В. Ф.*, *Журов А. И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.