

В. В. Учайкин, Р. Т. Сибатов (Ульяновск, УлГУ). **Алгоритм решения интегро-дифференциального уравнения с дробной производной методом Монте-Карло.**

Уравнения, содержащие производные дробных порядков, находят все более широкое применение при решении различных теоретических и прикладных задач [1], [2]. В работе, представленной данным сообщением, получен несмещенный алгоритм решения интегро-дифференциального уравнения с дробной производной методом Монте-Карло.

Дробный пуассоновский процесс порядка $\nu \in (0, 1]$ интенсивности μ определяется как процесс восстановления с плотностью распределения времени ожидания T $\psi_\nu(t) = \mu e_\nu(\mu t)$, где «дробная экспонента» $e_\nu(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению дробного порядка [3]:

$${}_0D_t^\nu e_\nu(t) + e_\nu(t) = \delta(t), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) выражается через двухпараметрическую функцию Миттаг-Леффлера: $E_{\alpha, \beta}(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$: $e_\nu(t) = t^{\nu-1} E_{\nu, \nu}(-t^\nu)$. При $\nu = 1$ «дробная экспонента» превращается в обычную экспоненту и дробный пуассоновский процесс — в обычный пуассоновский процесс. Семейство плотностей представлено на рис.

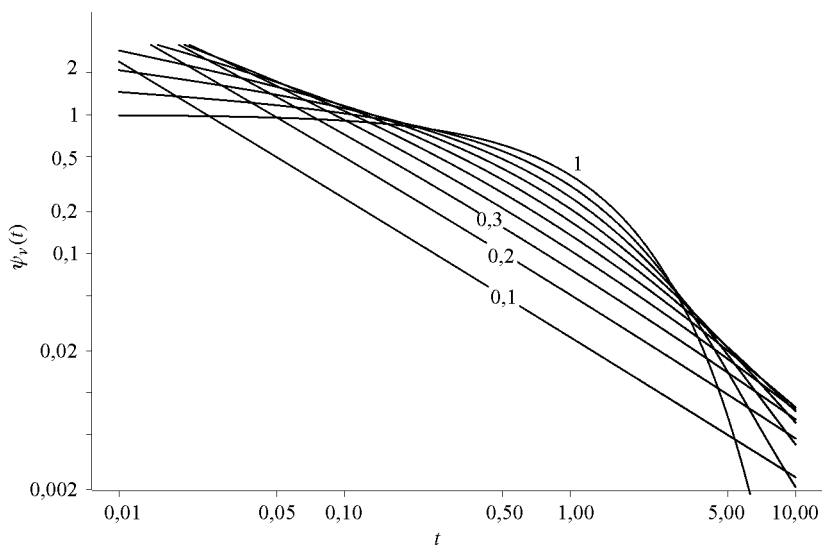


Рис. Плотности распределения $\psi_\nu(t)$

Следующие предложения доказываются в работе.

Лемма. *Дополнительная функция распределения $\mathbf{P}\{T > t\} = E_\nu(-\mu t^\nu)$ может быть представлена в виде следующего интеграла от односторонней устойчивой плотности $g^{(\nu)}$:*

$$\mathbf{P}\{T > t\} = \int_0^\infty e^{-\mu t^\nu / \tau^\nu} g^{(\nu)}(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Теорема. *Определенная выше случайная величина T имеет то же распределение, что и*

$$T' = \frac{|\ln U|^{1/\nu}}{\mu^{1/\nu}} S_\nu, \quad (3)$$

где S_ν — случайная величина с плотностью распределения $g^{(\nu)}$, а U — не зависящая от нее случайная величина с равномерным распределением в интервале $(0, 1)$.

Следствие. Из (3) теоремы и результата работы [4] следует:

$$T' \stackrel{d}{=} \frac{|\ln U_1|^{1/\nu}}{\mu^{1/\nu}} \frac{\sin(\nu\pi U_2) [\sin((1-\nu)\pi U_2)]^{1/\nu-1}}{[\sin(\pi U_2)]^{1/\nu} [\ln U_3]^{1/\nu-1}}, \quad (4)$$

где U_1 , U_2 и U_3 — независимые случайные величины с равномерным на $(0, 1)$ распределением.

На основе алгоритма (4) разработан и апробирован статистический метод решения интегро-дифференциального уравнения вида

$${}_0D_t^\nu f(x, t) + \mu f(x, t) = \int_{\mathbf{R}_n} K(x, x') f(x', t) dx' + \varphi(x, t), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

В отличие от асимптотически несмещенной оценки, приведенной в [5], оценка, полученная на основе дробного пуассоновского процесса, является несмещенной.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07-01-00517.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Учайкин В. В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы. — Успехи физ. наук, 2003, т. 1736, № 8, с. 847–876.
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, 2006.
3. Laskin N. Fractional Poisson process. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2003, v. 8, p. 847–876.
4. Kanter M. Stable densities under change of scale and total variation inequalities. — Ann. Probab., 1975, v. 3, p. 697–707.
5. Учайкин В. В., Саенко В. В. Стохастическое решение уравнений в частных производных дробных порядков. — Сибирский журнал вычисл. матем., 2003, т. 6, № 2, с. 197–203.